福井高専　　宮田　一郎

1　研究の趣旨

二項係数を並べてできるパスカルの三角形を偶数、奇数で色分けするとフラクタル図形であるシェルピンスキーガスケットが得られることはよく知られている。ここでは、Excel を用いて手軽にフラクタル図形をつくる方法を紹介する。

2　パスカルの三角形

	B
A	C

素数 p について、セル C の値を

C＝ mod (A＋B,p)

で定める。そして、p で割り切れるセルの色を白、割り切れないセルを水色に塗ると、シャルピンスキーガスケット型のフラクタル図形（自己相似図形）が得られる。パスカル三角形 mod p と呼ぶ。　このとき、次のことが成り立つ。

(1)　パスカル三角形 mod p において、辺長 $p, p^2, \cdots, p^n, \cdots$ の正方形を作ると完全自己相似となっている。

(2)　辺長 p^n の正方形における水色のセルの個数は

$$S_n = \left(\frac{p^2+p}{2}\right)^n \quad \text{となる。}$$

(3)　ハウスドルフ次元

$$H(p) = \frac{\log([p^2+p]/2)}{\log p}$$

が成立する。

素数 p を整数 m にするとどうなるのか？

3　パスカルの四角形

A	B
C	D

素数 p について、セル D の値を

$D =$ mod $(A+B+C, p)$

で定める。そして、そして、p で割り切れるセルの色を白、割り切れないセルを水色に塗ると、フラクタル図形（自己相似図形）が得られる。パスカル四角形 mod p と呼ぶ。　このとき、次のことが成り立つ？(予想です)

(1)　辺長 $p, p^2, \cdots, p^n, \cdots$ の正方形を作ると完全自己相似となっている

(2)　面積公式

$$S_n = (p^2 - m(p))^n$$

が得られる

(3)　ハウスドルフ次元公式が成立する。

$$K(p) = \frac{\log(p^2 - m(p))}{\log p}$$

$m(P)$ は (1,1) セルから (p,p) セルにある mod $p > 0$ なセルの個数

素数 p を整数 m にするとどうなるのか？

4　セルオートマン

セルオートマンと考えると素数 p について、セル D の値を

$D =$ mod $(F(A,B,C), p)$

で定める。F は 3 変数の関数とする。フラクタル図形となるのか？

5　行列のクロネッカー積を用いる

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について、

$A^{(n)} = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$

とする。$A^{(n)}$ の成分を　mod p で塗り分けると自己相似な図形ができる。

素数 p を整数 m にするとどうなるのか？

6　　参考文献

(1)　フラクタル幾何学　ファルコナー著

(2)　Excel で楽しむ数論　鈴木治郎著

(3)　１１からはじまる数学　松田修他著

(4)　Ｅｘｃｅｌコンピュータシミュレーション　三井和男著