

2014年6月28日 グラフ電卓研究会

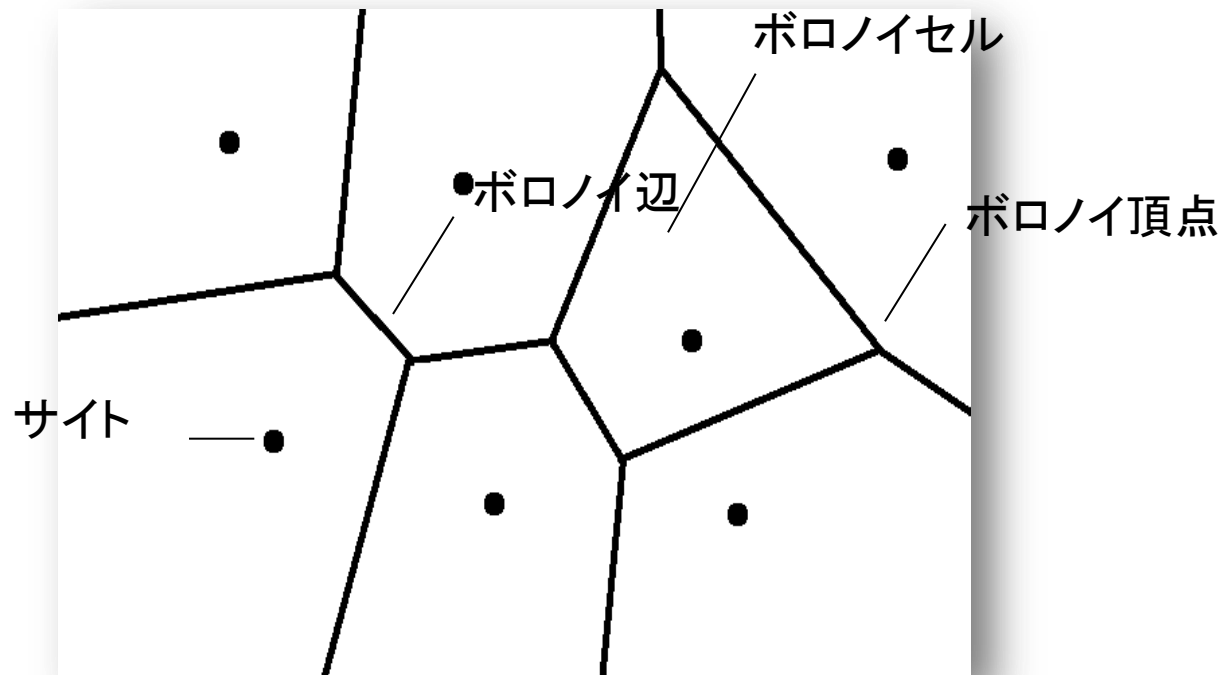
ボロノイ図の 描画アルゴリズムについて

福井大学大学院 教育学研究科 教科教育専攻 数学教育コース 1年

前川 友樹

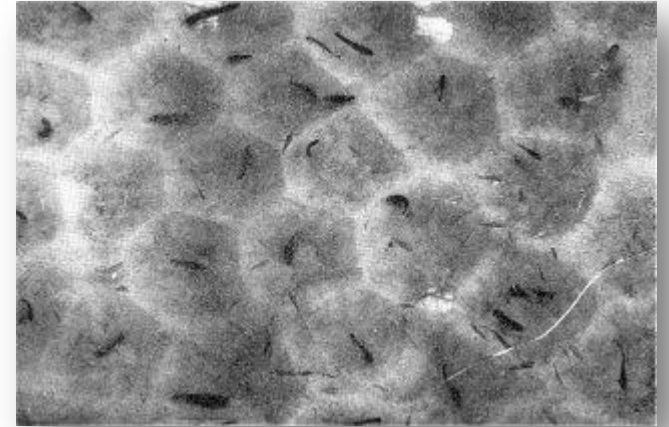
ボロノイ図とは？

- 平面において、ある点集合に対して、どの点が一番近いかで分けられた図形。



自然界のボロノイ図

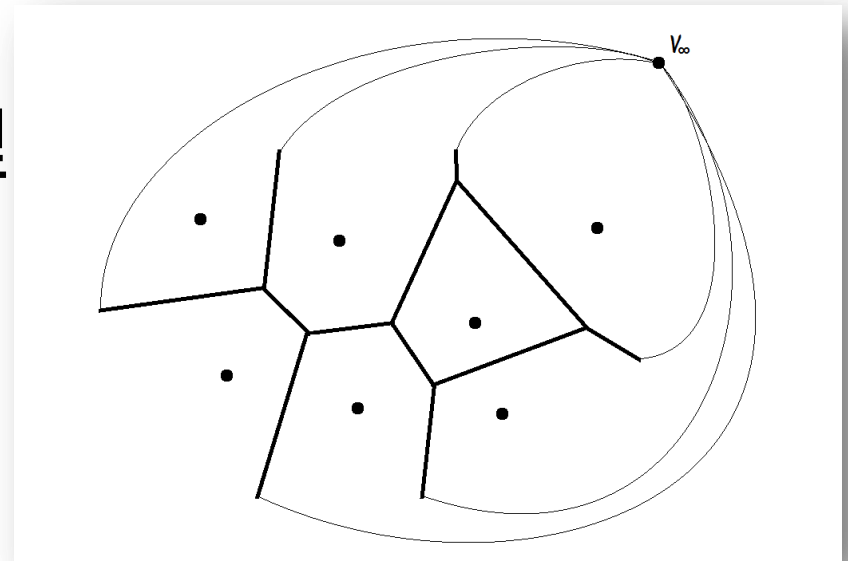
- 縄張り
 - イソギンチャク
 - 亀の甲羅
- 六角形が多い



ボロノイ図の性質

- 平面上の n 個の点サイトの集合に対するボロノイ図の頂点数は高々 $2n-5$ であり、
辺数は高々 $3n-6$ である。

オイラーの多面体定理
を利用すると証明可能。



ボロノイ図の性質

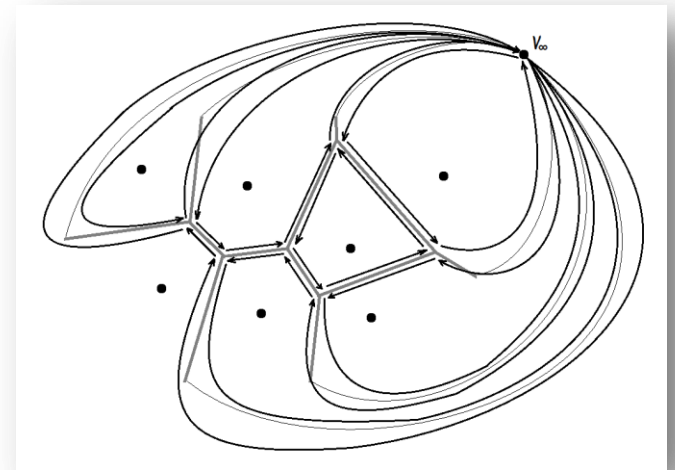
- ボロノイセルの平均辺数は6未満である。

1つのセルに対する

平均辺数を K として,

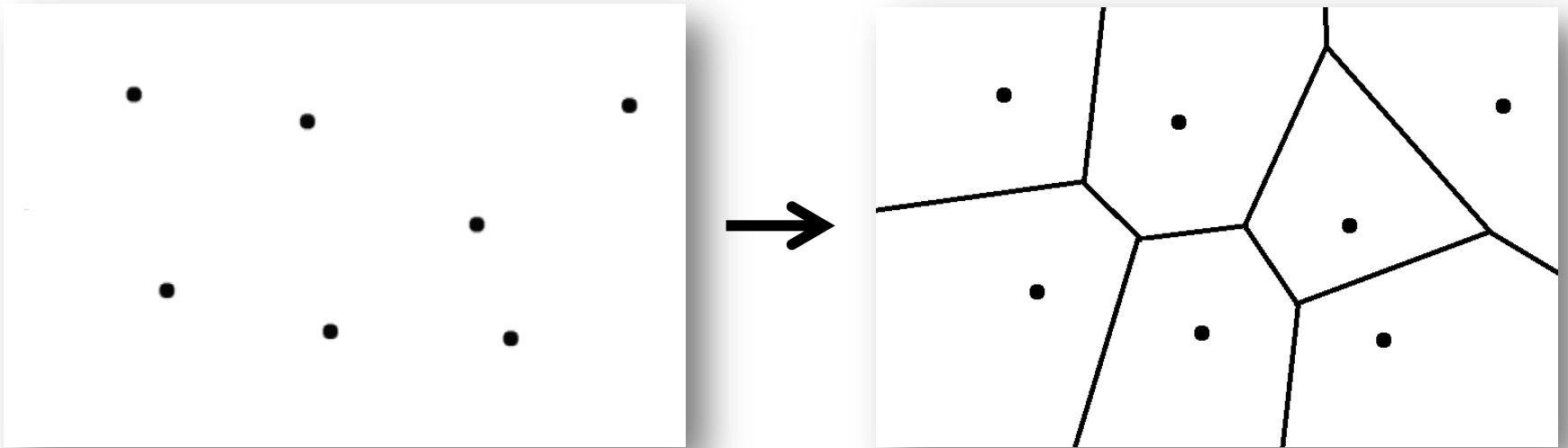
$$K \leq \frac{2(3n-6)}{n} = 6 - \frac{12}{n} < 6$$

n を十分に大きくとれば, 必然的に辺数6



Fortuneのアルゴリズム

- はじめに点の集合 P (サイトの集合)を与え、それに対するボロノイ図を求める。



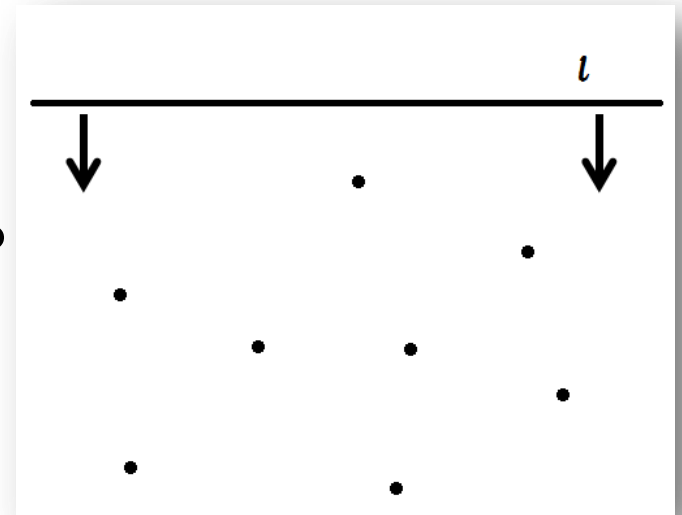
n 個の点の点集合に対して $O(n \log n)$ の時間で求められる。

Fortuneのアルゴリズム

- 平面走査法

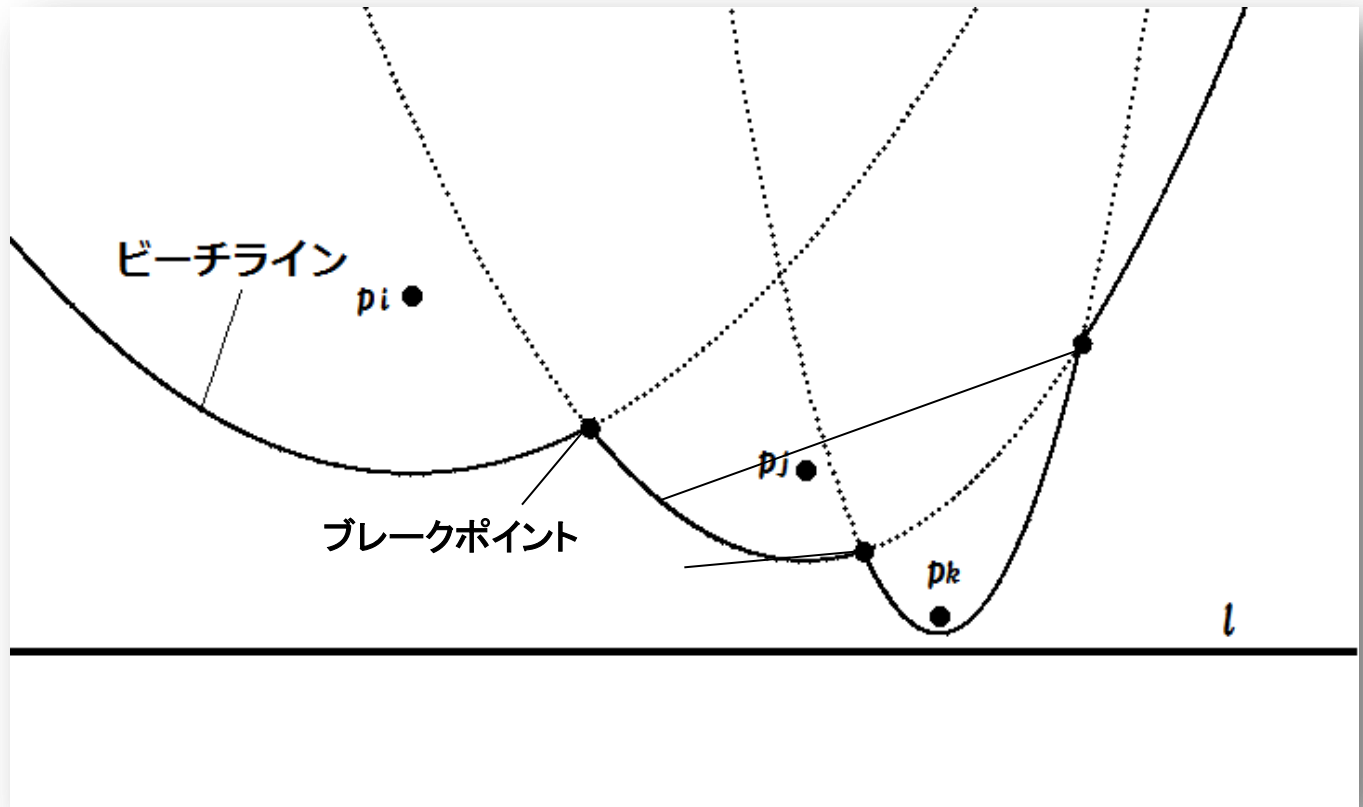
効率よく平面上を走査するのに適した方法

仮想的な**走査線** l を考え、
上から下に動かして見ていく。



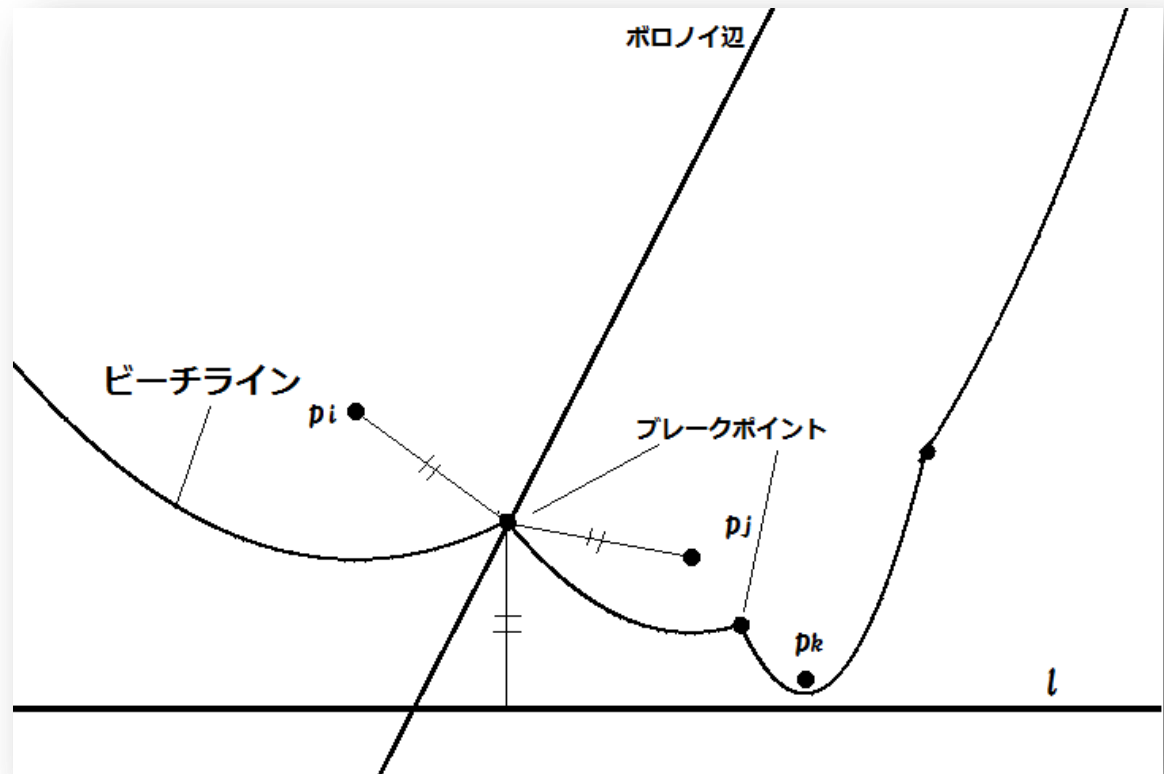
Fortuneのアルゴリズム

- サイトを焦点とし走査線 l を準線とする放物線の弧の一番下の関数(ビーチライン)を見ていく。

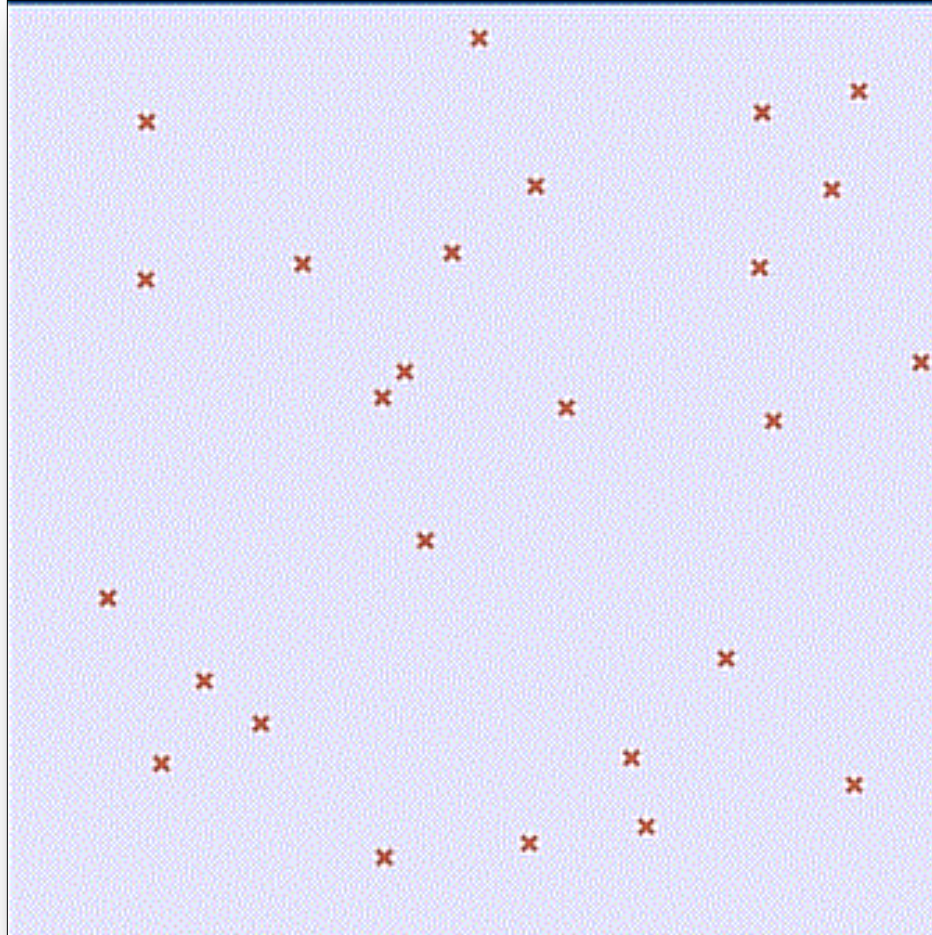


Fortuneのアルゴリズム

- ブレークポイントはボロノイ辺上にある。
→ブレークポイントを追っていけばボロノイ図全体が分かる。



Fortuneのアルゴリズム

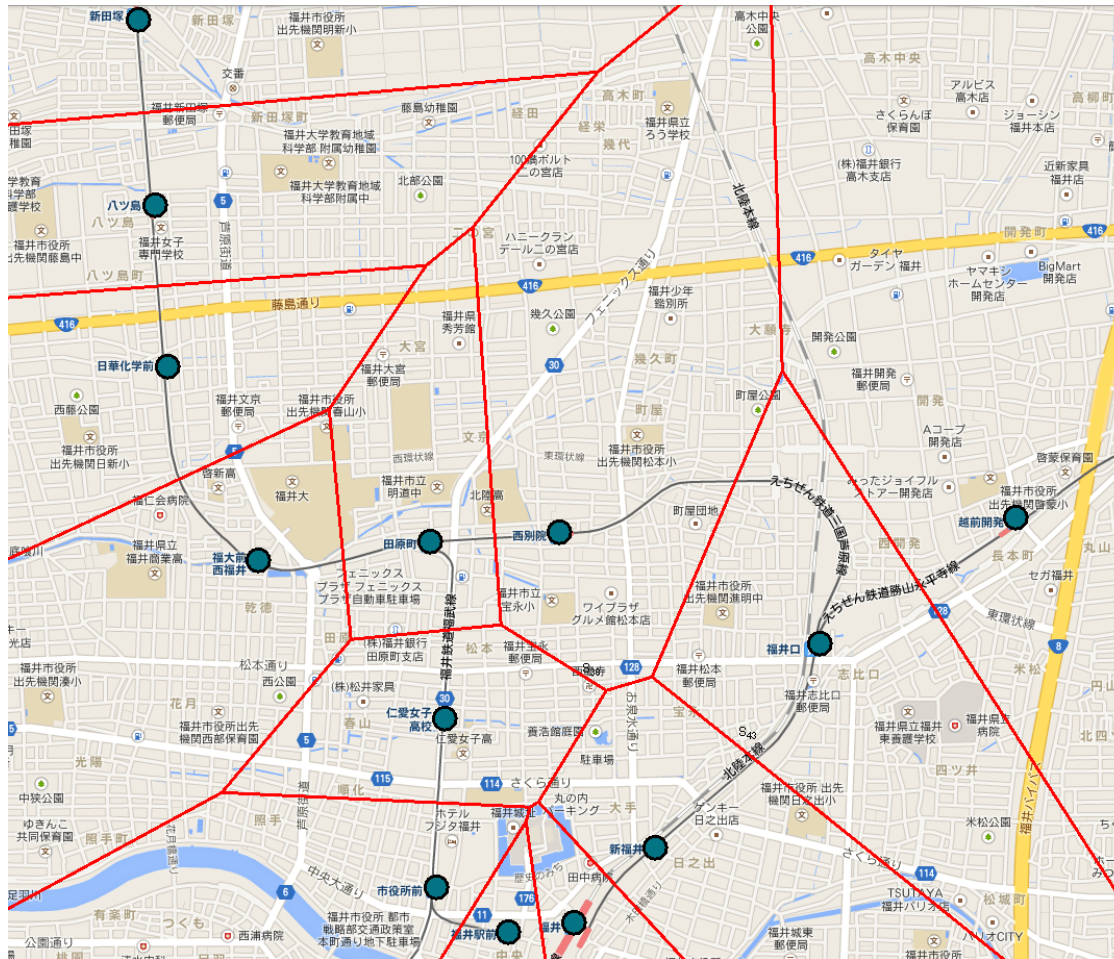


Youtubeより

Sweep line algorithm - Voronoi tessellation

<http://www.youtube.com/watch?v=k2P9yWSMaXE>

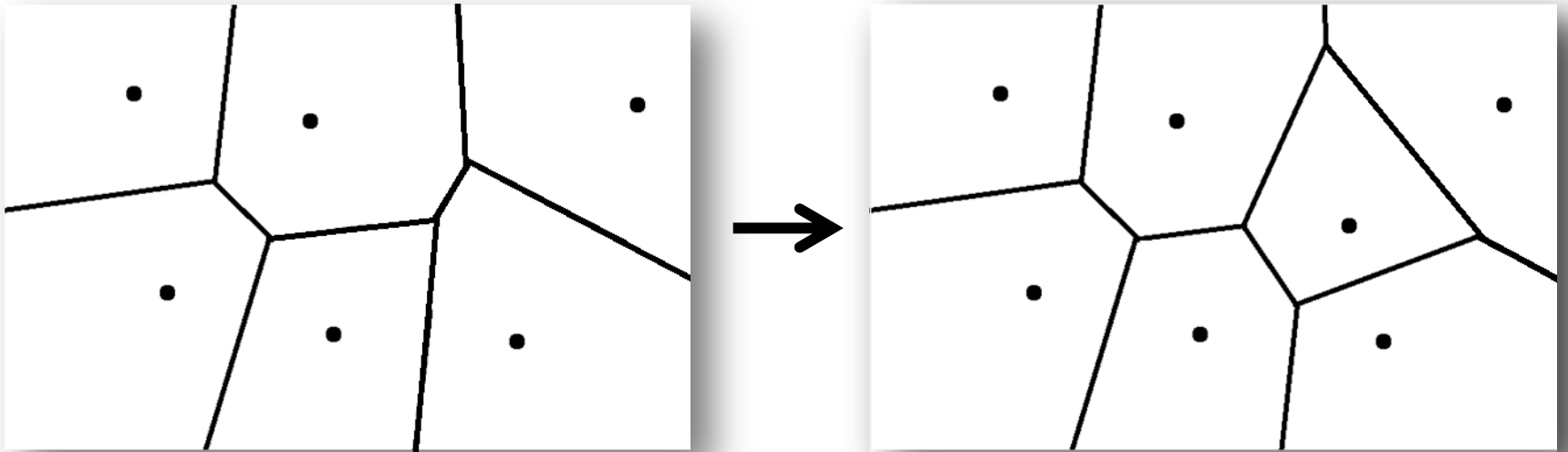
ボロノイ図の例



福井大学周辺の駅に対するボロノイ図

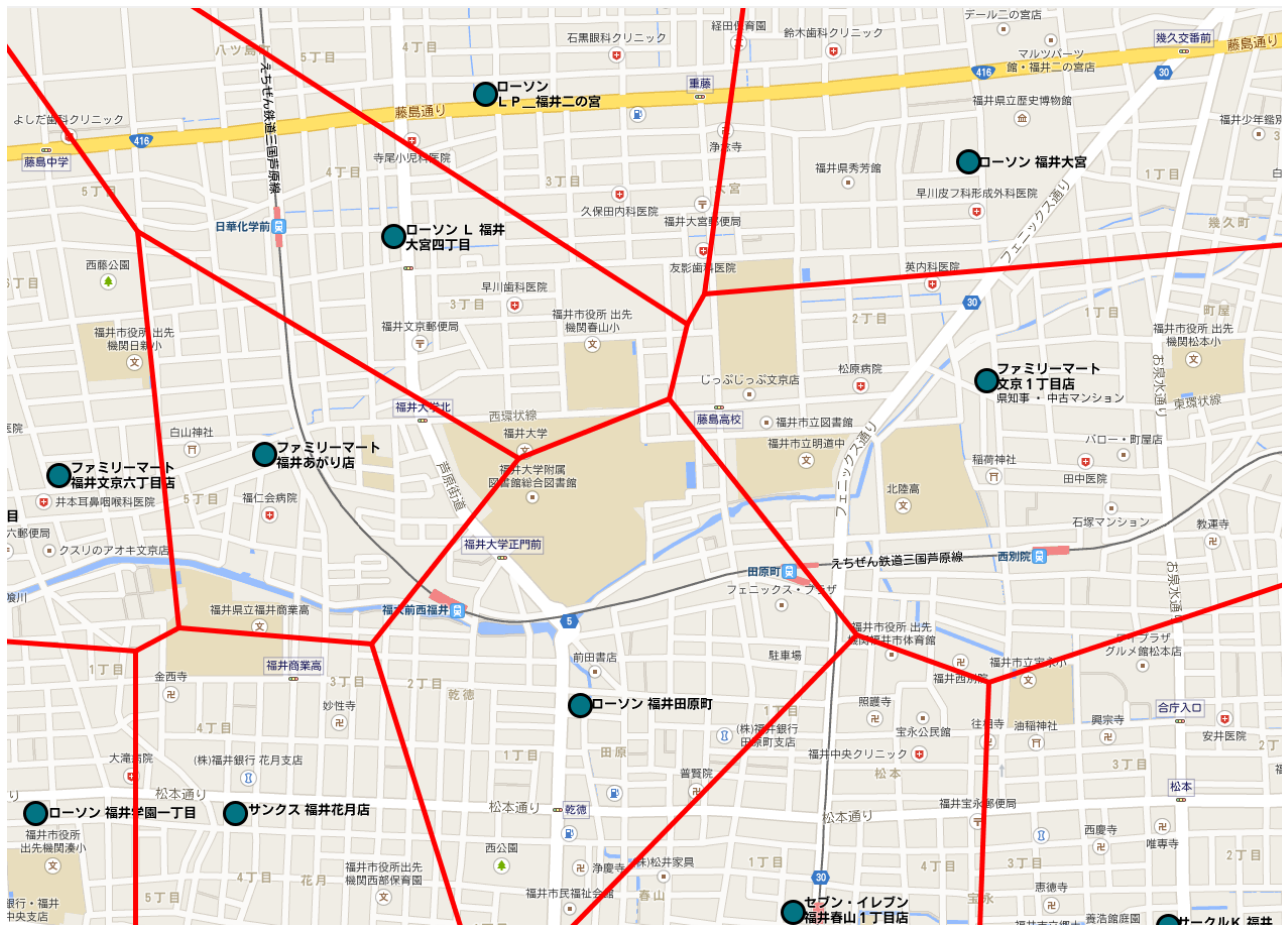
逐次添加法

- 1つずつサイトを追加していきボロノイ図を更新していく。



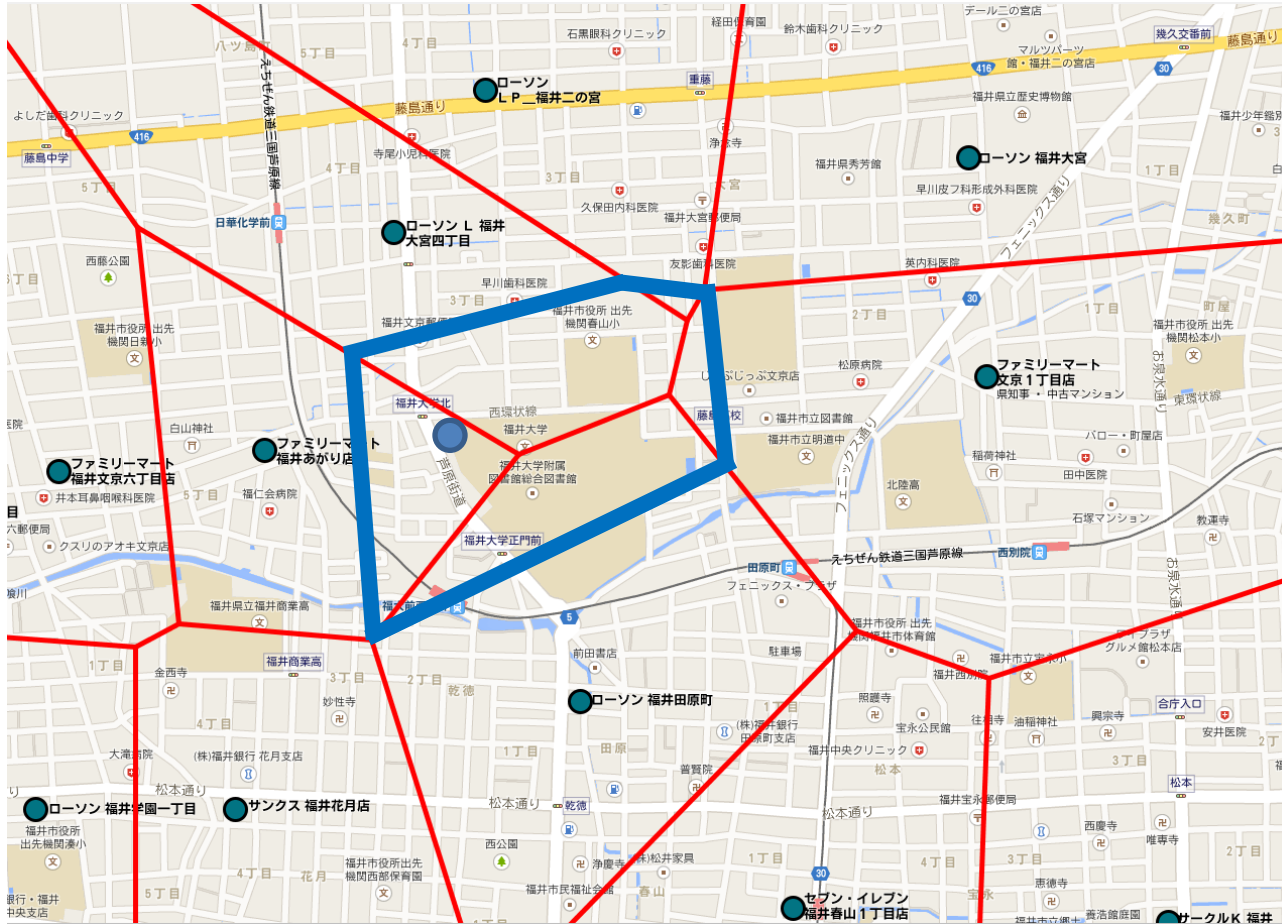
n 個の点の点集合に対して平均的に $O(n)$ の時間で求められる。(最悪の場合 $O(n^2)$)

ボロノイ図の例



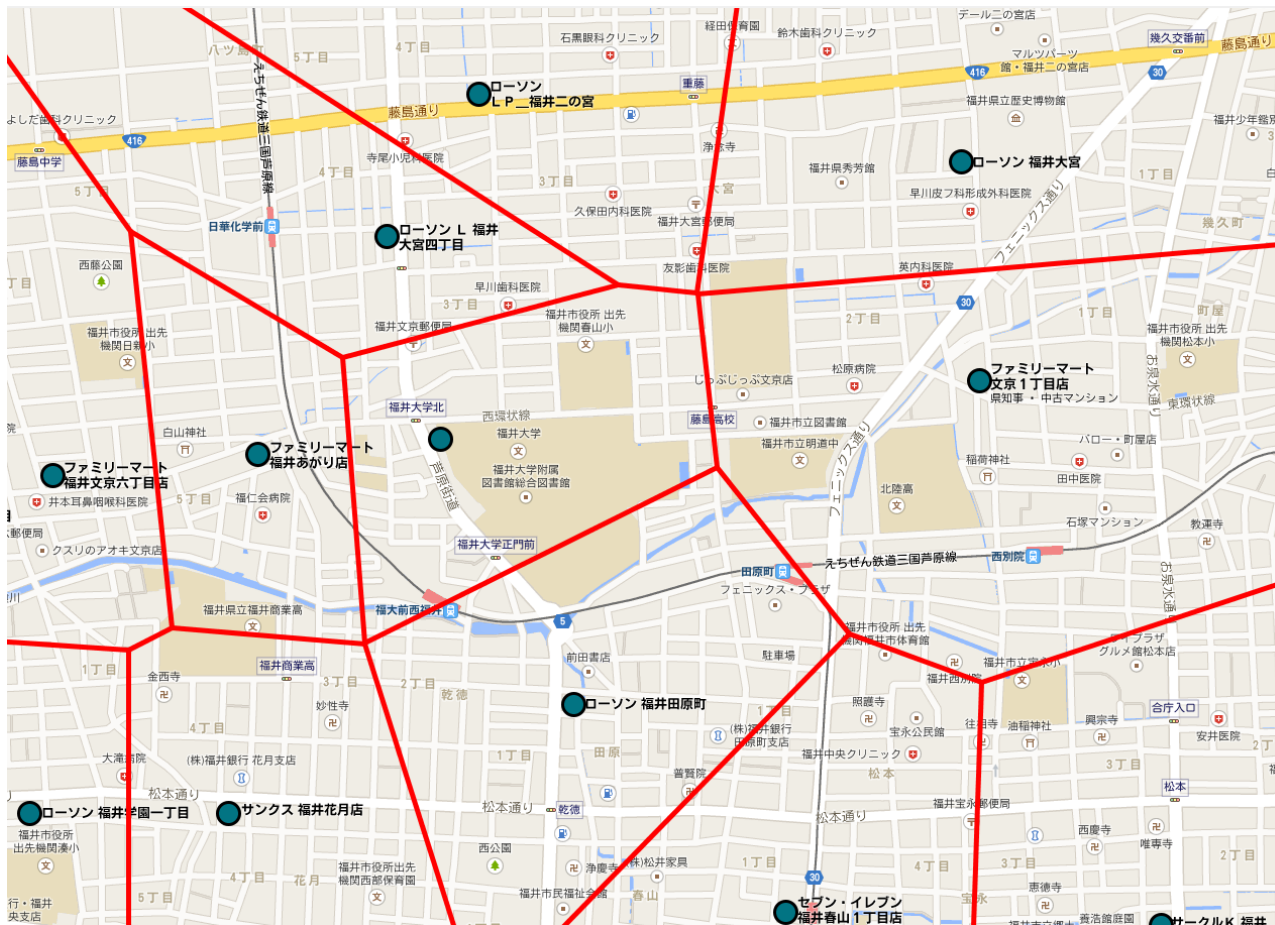
福井大学周辺のコンビニに対するボロノイ図

ボロノイ図の例



福井大学周辺のコンビニに対するボロノイ図

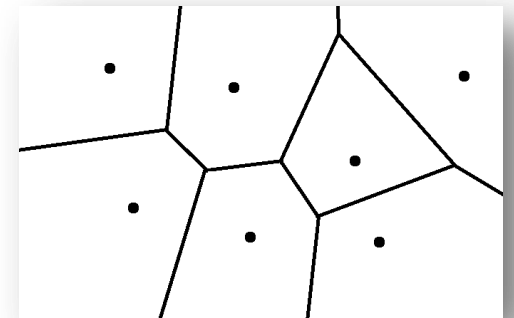
ボロノイ図の例



福井大学周辺のコンビニに対するボロノイ図

教材化

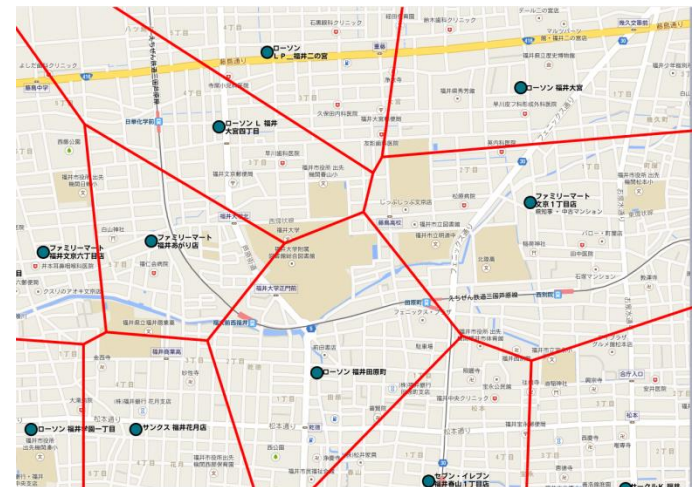
- 二等分線の理解を深めたり、
領域の考えを深めたりできないか
- ボロノイ図の各領域(ボロノイセル)
の面積を求める方法はいくつか考えられる
 - 三角比・積分・重さをはかったり



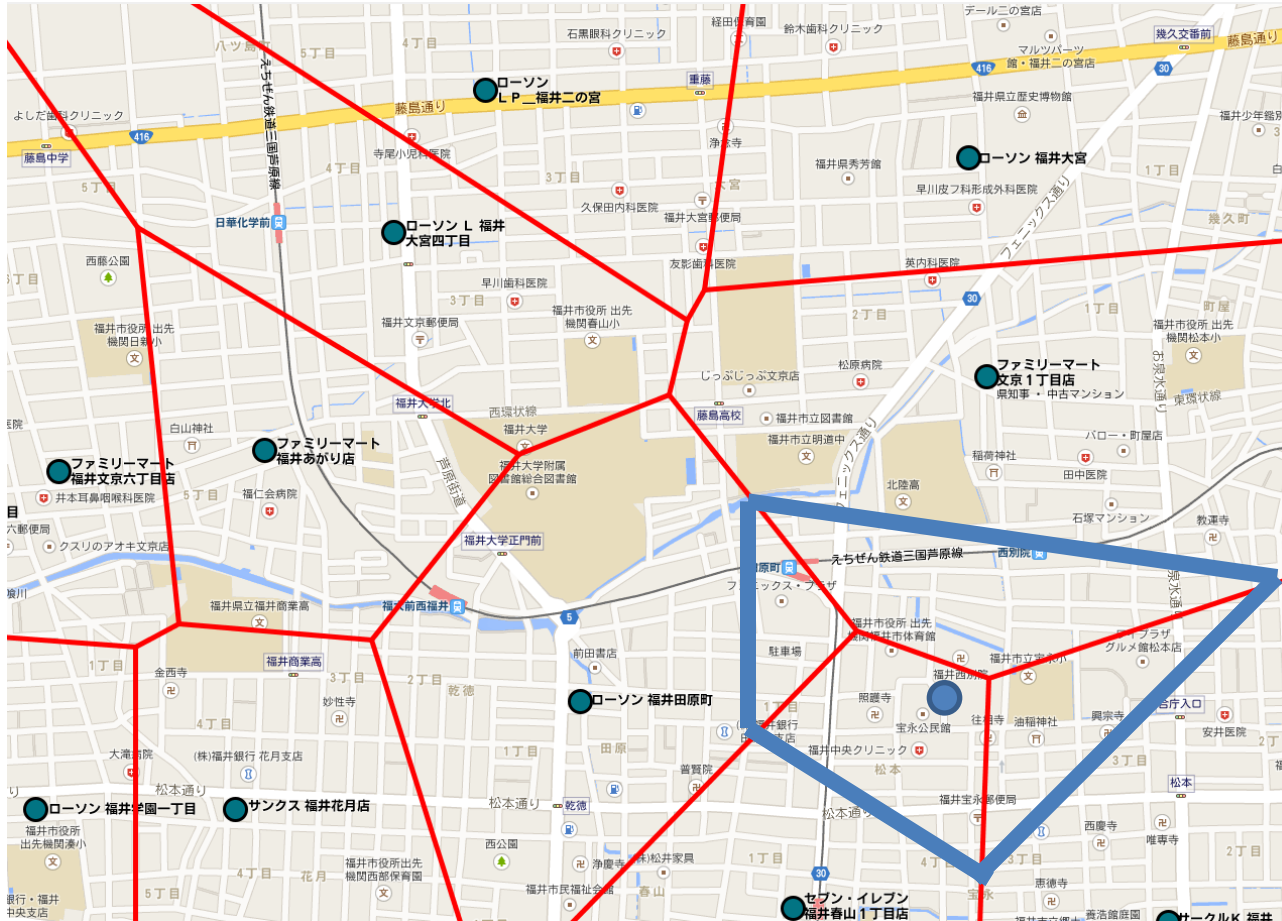
教材化

コンビニを新しくつくるとしたら、
今あるコンビニの位置を考慮して、
どこに新しいコンビニをつくと良いだろうか。

- 商圈の広さがより広い
場所はどこになるか。

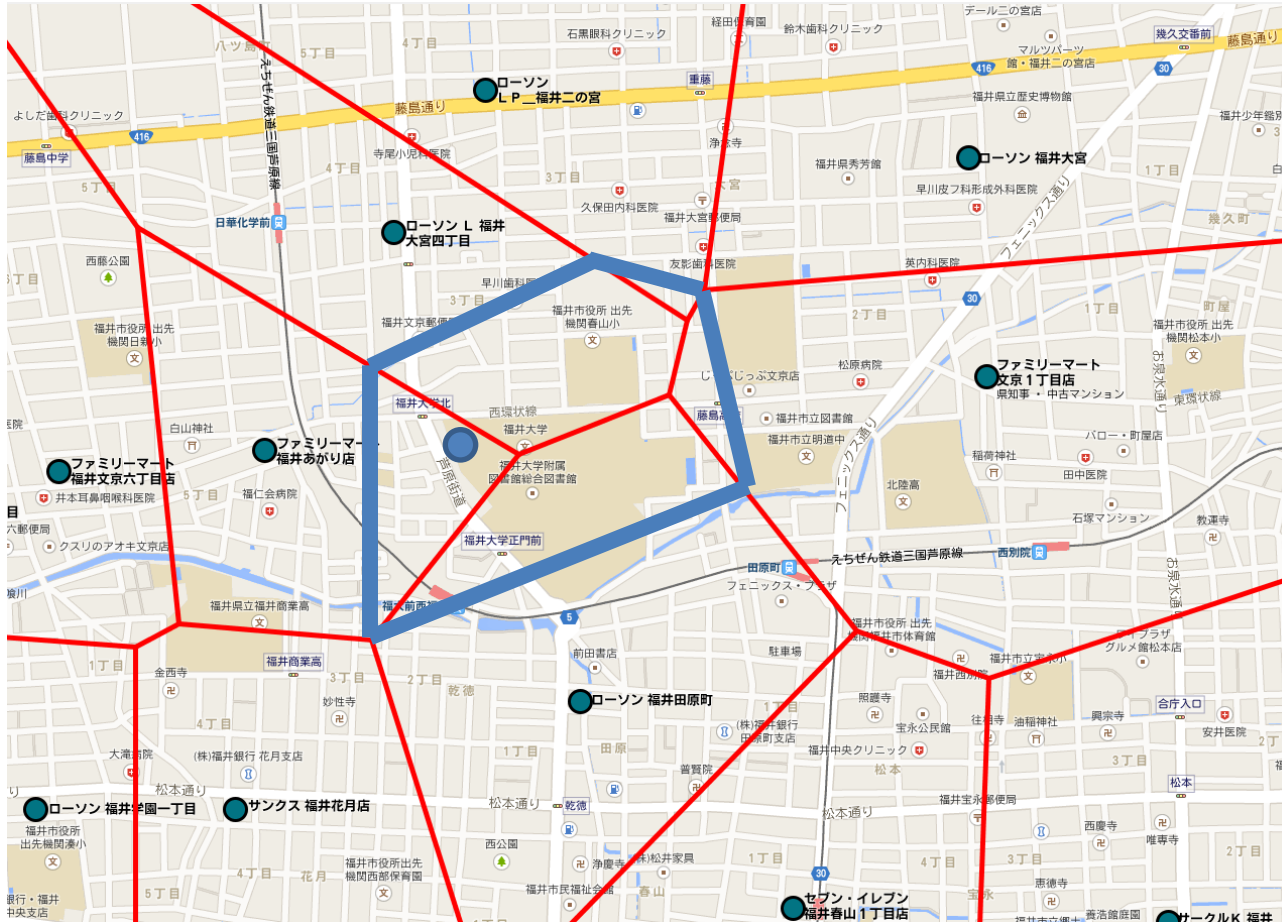


教材化



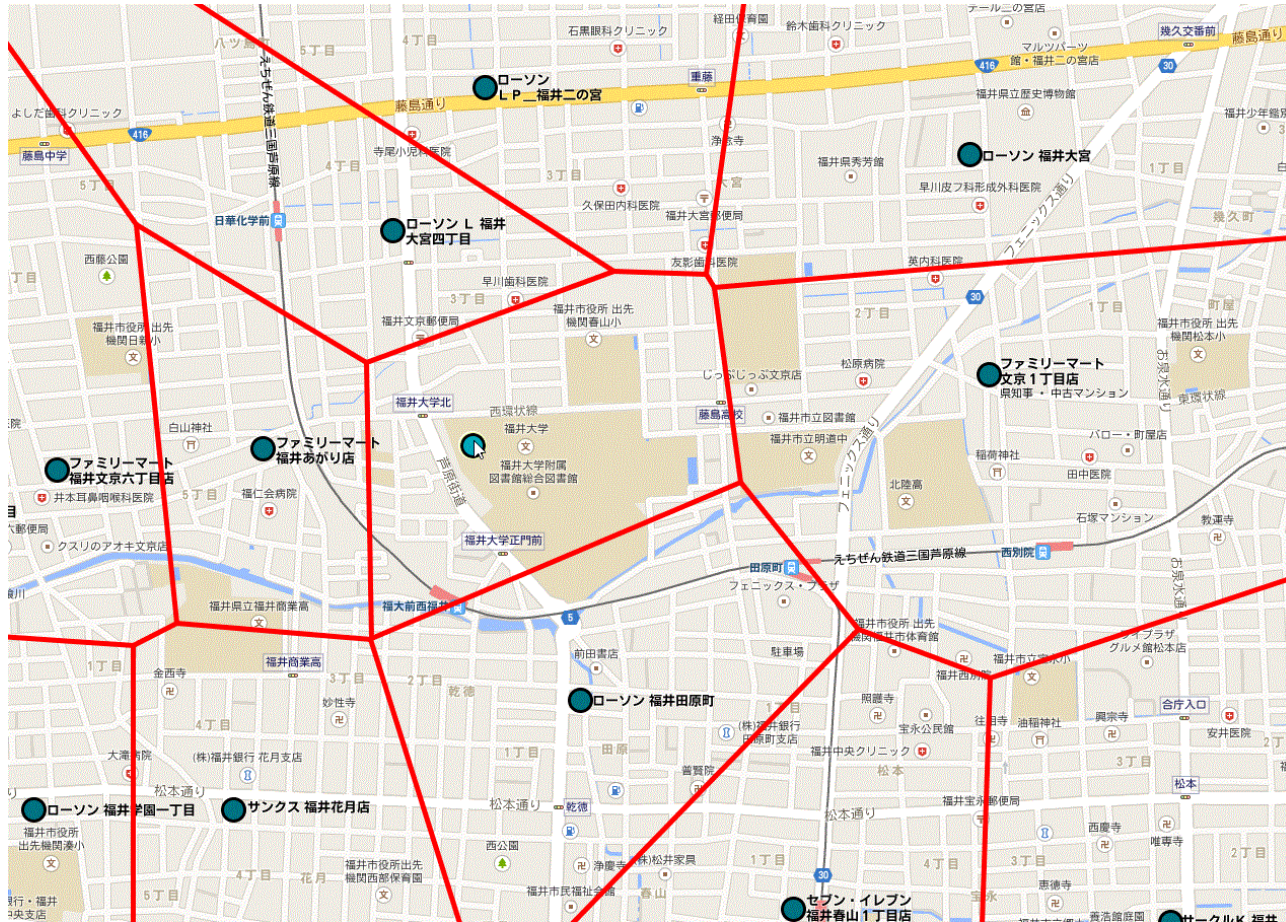
福井大学周辺のコンビニに対するボロノイ図

教材化



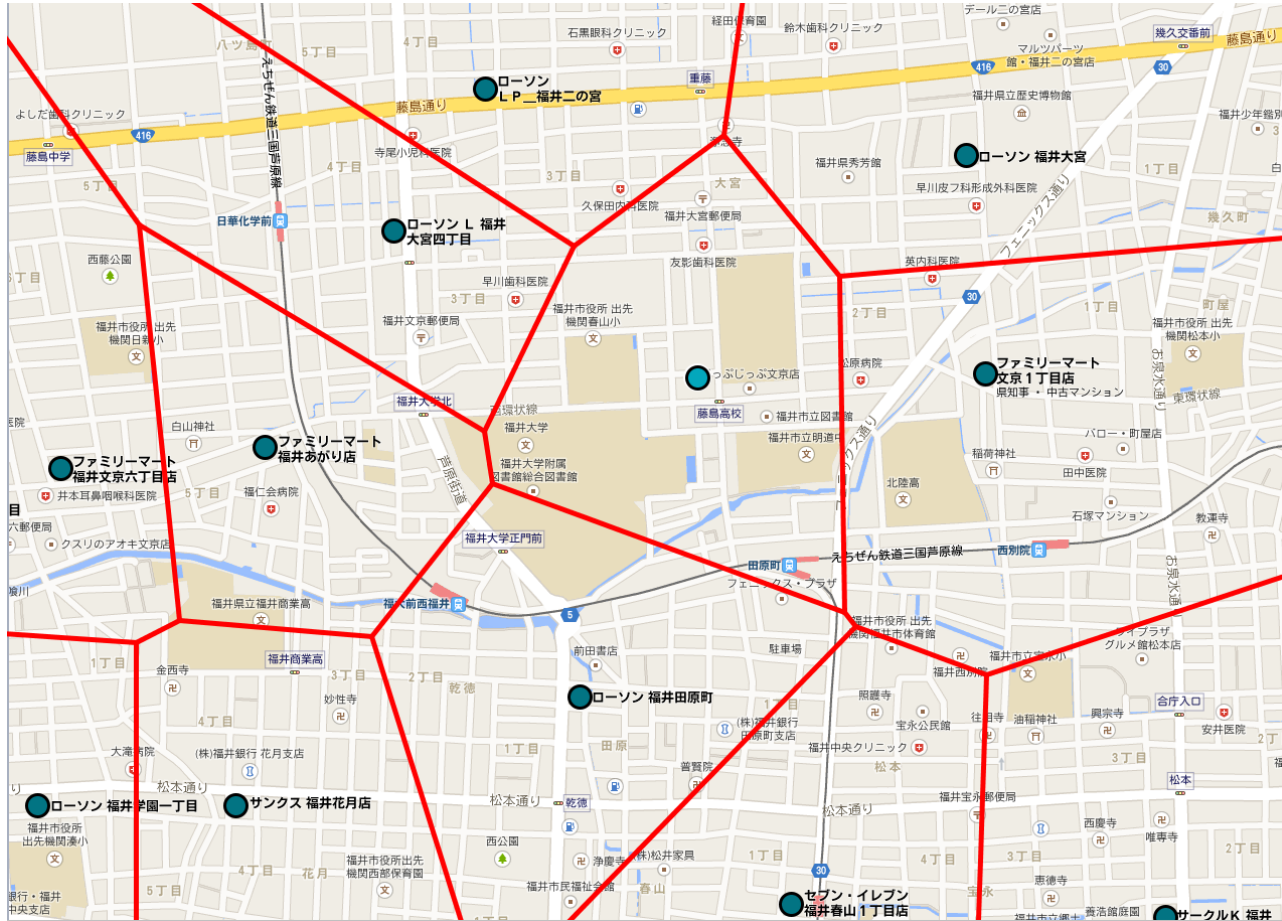
福井大学周辺のコンビニに対するボロノイ図

教材化



福井大学周辺のコンビニに対するボロノイ図

教材化

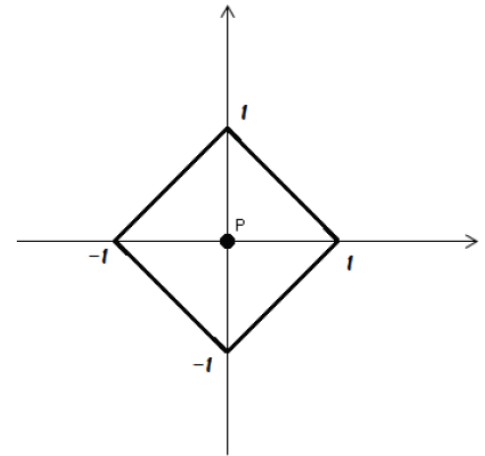


福井大学周辺のコンビニに対するボロノイ図

※発展

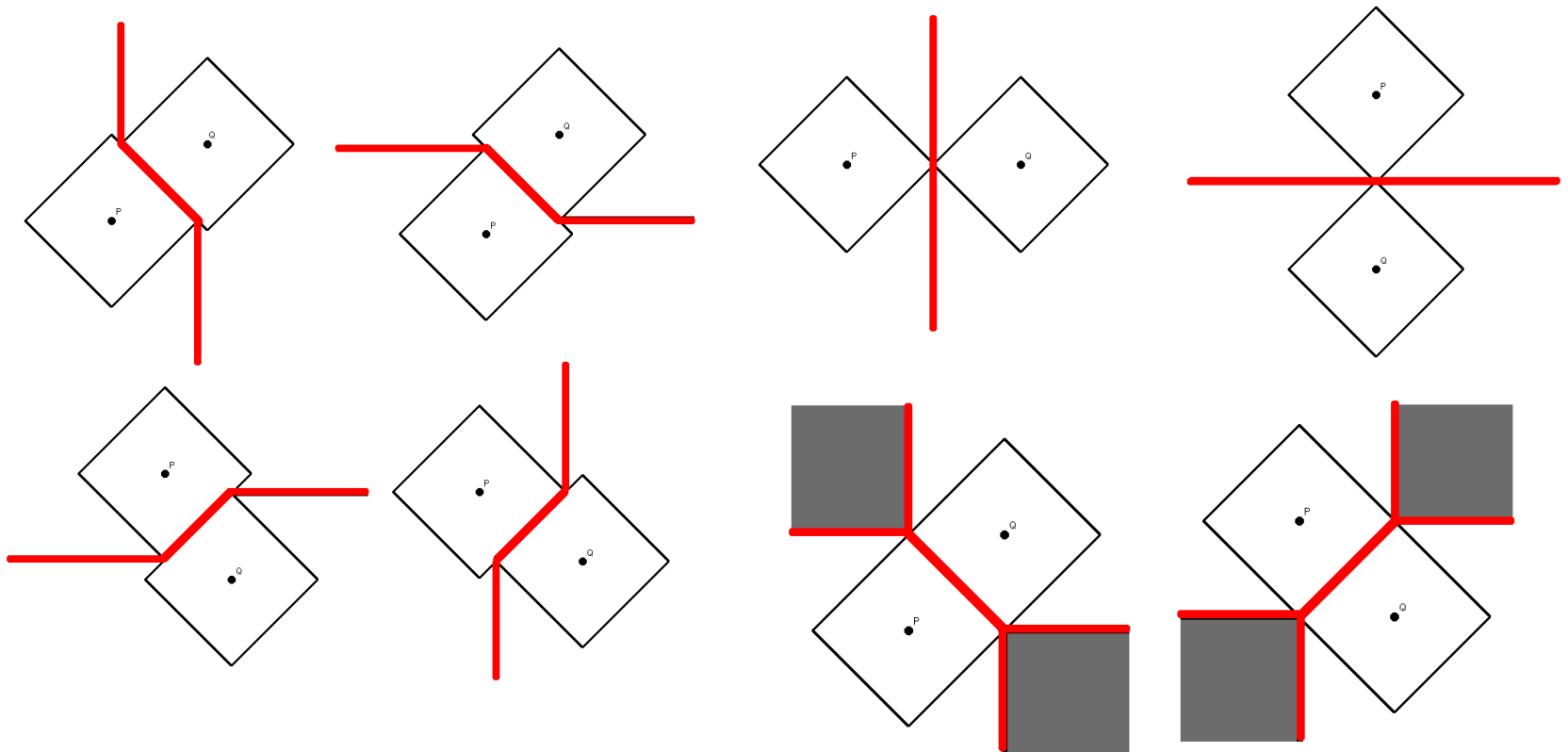
- L_1 距離 (マンハッタン距離)

$$L_1 \text{dist}(i, j) = |i_x - j_x| + |i_y - j_y|$$

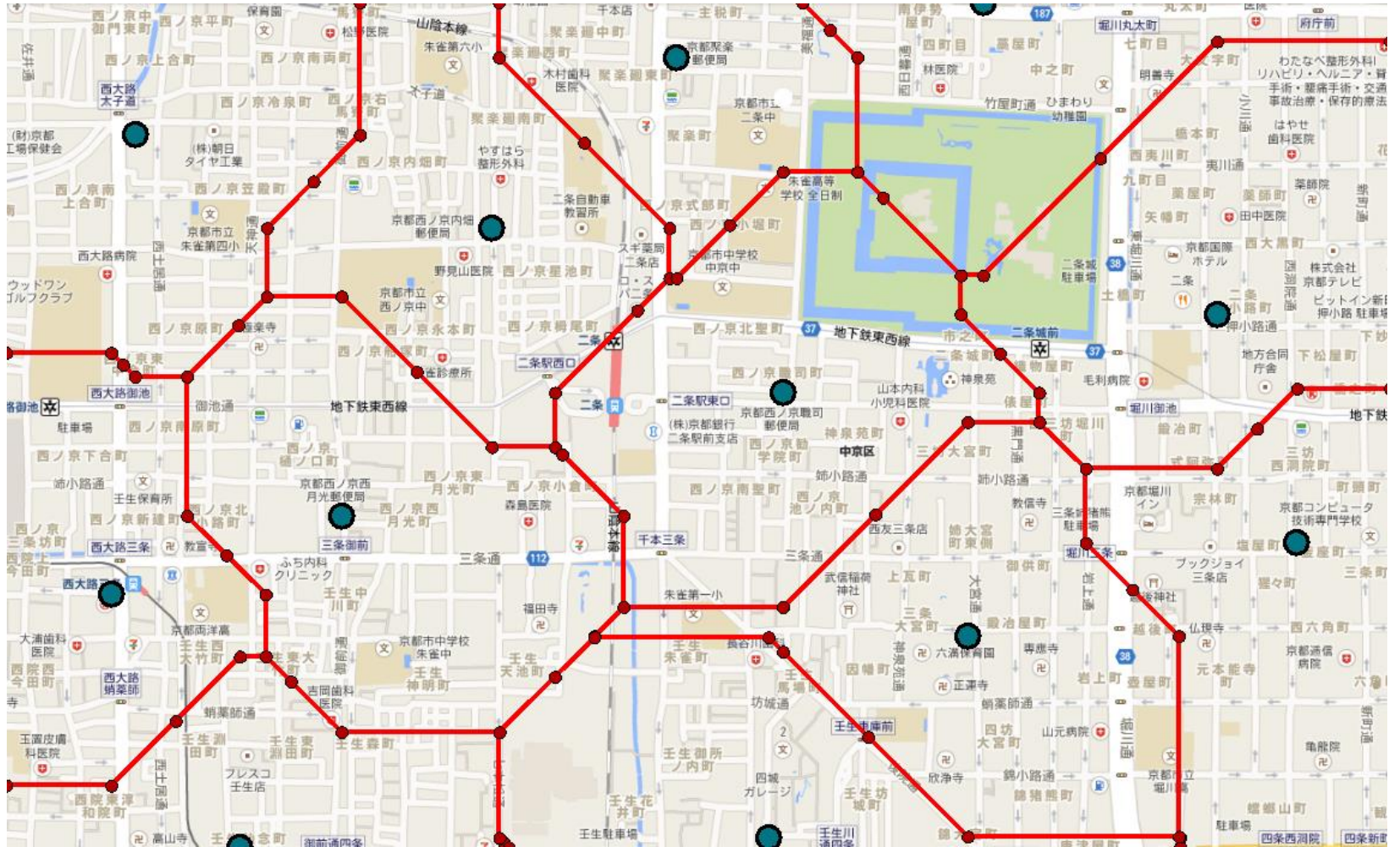


※発展

- マンハッタン距離での二等分線



マンハッタン距離でのボロノイ図



二条城周辺の郵便局に対するボロノイ図

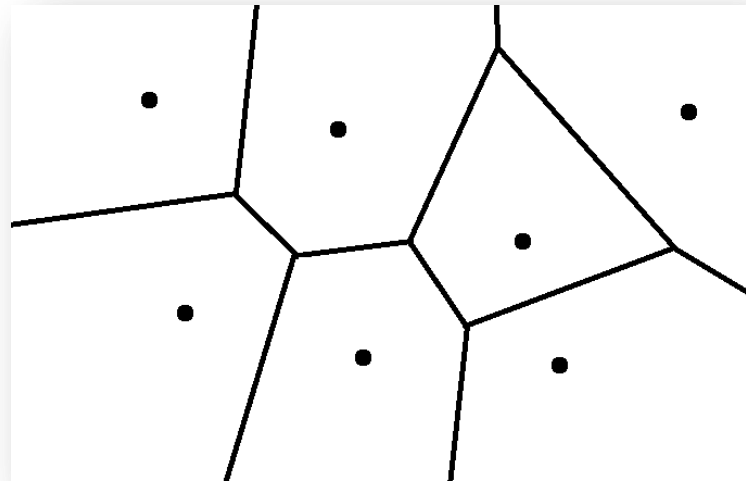
ユークリッド距離でのボロノイ図



二条城周辺の郵便局に対するボロノイ図

さいごに

- ボロノイ図は面白い性質をもっている。
- 日常生活とのつながりも見られる。
- 教材化についてもっと具体的にその可能性を探っていきたい。



ご静聴ありがとうございました