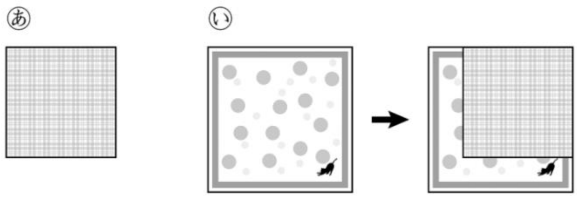
「Technology は数学の世界を広げる」ことの実感

渡辺信　日本数学検定協会
longlifemath@gmail.com

1. 数学的思考は見えるものから見えないものへ

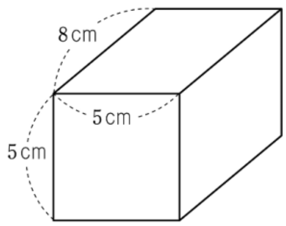
小学校の思考過程を見たときに、算数の問題は「見えるもの」へと具体化することが出発点である。この見える世界が具体的なものとしては見えなくても、思考過程では見えているらしい。

(17)　下のように　Ⓐと　Ⓘを　かさねました。ひろいのは
どちらですか。Ⓐか　Ⓘで　こたえましょう。



右のような　はこの　形に　ついて，
つぎの　もんだいに　答えましょう。
(17)　ちょう点は　いくつ　ありますか。

(18)　正方形の　面は　いくつ　ありますか。



このような段階を経て、数学的思考は論理的な訓練になる。この論理的訓練も遊びの中で行われていく。論理的思考も「見えること」を基本として「どうして・なぜ」が問われる。この論理的思考は具体的なものを見ることから抽象的な数学へと変化していく。

小学校の段階では「具体的に見えること」は数学的思考にとって非常に重要な役割を演じる。この具体的に見ることの世界から抽象的な世界へと移行することは数学教育が行う訓練でもある。現在の数学教育では抽象化された事柄から始まり具体性が乏しいのではないかと思う。そこで小学校の最初の段階があるように数学教育でも導入部分としての「見ること」が必要である。自ら考えるということは抽象的な事柄を見える世界へと引き戻すことができるかが問われる。

2. 循環小数の世界

分数の世界は小学校であり今更考えることはないと思っていた。しかしこの世界は非常に面白い問題が残っているようでもある。数論はあまり考えたことがないのでもしかするともう解っているかもしれない問題といわれるかもしれないが、Technology はいろいろなことを見せてくれる。

1/9=0.111…と循環小数に直すことができる。(これは小学生でも知っている)
この循環小数 0.1 と 0.1 を掛け算をしたら結果はどうなるか。電卓を持ってきて掛け算すると 8 桁しか

見えない電卓では残念ながら最後まで見えない。

1/9×1/9=0.0123457　8桁表示の電卓の結果（最後の数字7は6かもしれない）

そこで100倍してはじめの0.0の桁をかえてみる。

1/9×1/9×100=1.2345679　8桁表示の電卓の結果は少し広がったが最後の9は8かもしれない。どのような循環小数になっているかはわからない。それでは筆算で掛け算をしてみればよい。無限に続く数どうしの掛け算の方法はどのようにしたら誤差がない結果が得られるのか？

1

1

1 1

1/9×1/9の計算結果（エクセルを利用）

1/9×1/9を計算すると123456790の循環小数になることが分かる。8桁電卓では残念ながらあと少し見ることができなかった。最近スマホでは9桁表示であるが小数点も桁数に入るらしい。（多くの人が持っているスマホで計算をする人はほとんどいない）なぜ8が抜けているのか不思議で調べてみたくなった。きちんと繰り上げをしていくと8が抜ける。

待ち受ける数1桁＋繰上り数が1桁のとき（最大9）→繰り上げ数が最大1

一般的に繰上り数n桁のとき影響があるのは（n+1）個前まで

1/9×1/9までは見ることができた。そこで1/9×1/9×1/9を見たいと思う。同じような計算をエクセルでやってみる。今度はどんな規則性のある循環小数になるかを見てみたい。このようなことを考えなかったのはなぜかは、計算すればわかることである。1/9×1/9もどんなに多くとも80回割り算をすればどこかで繰り返されるのはわかっている。でも実際に計算することはなかったのでどのように数字が並んでいるのかわからなかった。（もしかするとわかる必要もないかも知れない。80回計算すれば終わることは自明なこととして知っている）

エクセルで(1/9×1/9)×1/9 を行う

何か規則があるようにも思える。同じ数 11 が並び間隔が同じで 22 が並ぶ。きっと 33，44、・・・と出てくるに違いない。

⑴7 桁おきに同じ数字が並ぶ

⑵はじめは１３７１７４２で次が２４８２８５３(これは各桁に１を加えている)

次はどうなるかを見たいと思う。３５９３９６４

しかしここまでは繰り上がりがない。次は４６（10）４（10）７５であるが繰り上がりを考えて４７０５０７５で予想通りである。

何か規則がありそうな気がすると繰り上がりをも考えて循環小数を作り出せるかもしれない。この結果を見たいと思うが予想では８１桁位になるものを計算することは大変である。

0	0	1	3	7	1	7	4	2	1	1
1	1	2	4	8	2	8	5	3	2	2
2	2	3	5	9	3	9	6	4	3	3
3	3	4	7	0	5	0	7	5	4	4
4	4	5	8	1	6	1	8	6	5	5
5	5	6	9	2	7	2	9	7	6	6
6	6	8	0	3	8	4	0	8	7	7
7	7	9	1	4	9	5	1	9	8	9
8	9	0	2	6	0	6	3	0	9	9
9	9	10	12	16	10	16	13	11	0	0

この計算をする電卓を見つけたときは少々残念であった。続きは予想とあっているか確かめることにした。実際に計算してみようとは思わないが予想が正しいか判定し、その理由を考えてみたい。
電卓が計算した結果をコピーする。(正しいかの判定はしない。)

0.00137174211248285322359396433470507544581618655692729766803840877914951989026063100

(period 81)

この電卓では 1/9×1/9×1/9×1/9 も計算結果を見ることができる。

0.0001524157902758725803993293705227861606462429507696997408931565310166133211400701112635269013869836915104404816338972717573540618808108520042676421277244322511812223746380124980948026215515927450083828684651729919219631153787532388355433622923334857491236092059137326627038561194939795762841030330742264898643499466544734034445968602347203170248437738149672306050906873952141441853376009754610577655845145557079713458314281359548849260783417162017985063252555296448712086572168876695625666819082456942539247065996037189452827312909617436366407559823197683279987806736777930193568053650358177107148300563938424020728547477518670934308794391098917847889041304679164761469288218259411675049535131839658588629782045419905502210028959000

(period 729)

しかし、この電卓でも限界がある。1/9×1/9×・・・×1/9×1/9 がいつまでも計算可能であることはない。そこでこの計算可能な結果を眺めることによって、新しい予想を作り出すことができるのではなかろうか。

1/9・・・・・・・・・・・ 1 桁=9^0
1/9×1/9・・・・・・・・・9 桁=9^1
1/9×1/9×1/9・・・・・ 81 桁=9^2
1/9×1/9×1/9×1/9・・729 桁＝9^3

予想　1/9×1/9×・・・×1/9×1/9＝$(1/9)^n$ の循環する桁数は $9^{(n-1)}$ である。

同じように電卓を用いて実験をすることによって、いろいろな「予想」を作り出すことができる。電卓の結果を知って数学の世界が広がり、数論の範囲まで拡張することができる。

1/7・・・・・・・・・・・・6 桁$=6\times7^{0}$

1/7×1/7・・・・・・・・・42 桁$=6\times7^{1}$

1/7×1/7×1/7・・・・・ 294 桁$=6\times7^{2}$

1/7×1/7×1/7×1/7・・2058 桁$=6\times7^{3}$

予想　1/7×1/7×・・・×1/7×1/7＝$(1/7)^{n}$の循環する桁数は$6\times7^{(n-1)}$である。

$(1/3)^{2}$の長さ＝１

$(1/3)^{3}$の長さ＝１×３

$(1/3)^{4}$の長さ＝１×３×３

$(1/3)^{5}$の長さ＝１×３×３×３

予想　$(1/3)^{n}$の長さ＝$3^{(n-2)}$　（ｎ≧２）ただしｎ＝１のとき長さ１

定理　分母の約数に２，５を含まない整数ｍに対して $(1/m)^{n}$の長さ＝$(1/m)$の長さ×$m^{(n-1)}$ ただし　ｎ＝３を除く

また、$(1/9)^{n}$の循環する桁は何故＋１なのかも興味深い。おそらく実際の計算結果を見なければこのようなふしぎな世界に参加することはできない。循環小数については電卓の結果が今までとは違う桁数を示すことができるようになって「問題作成」証明を加えることによってに「定理」作成使えると思う。

3．長さ 12 の循環小数の最小分母を探す

約数から求める最小整数は 9901 である。組み合わせでもっと小さな整数を見つける。

長さ２×長さ６ → 1/11×1/7 → 長さ６

→ 1/11×1/13 → 長さ６

長さ３×長さ４ → 1/27×1/101=1/2727 → 長さ 12

→ 1/37×1/101=1/3737 → 長さ 12

長さ４×長さ６ → 1/7×1/101=1/707 → 長さ 12

→ 1/13×1/101=1/1313 → 長さ 12

循環する部分の長さが 12 のときの分子の最小数は 707 であることが具体的に計算することによって求めることができる。この方法が正しいかは次の目標になる事柄が示されればよい。

目標　長さｍと長さｎの循環小数の積＝長さｍ×ｎ

数学の世界が広がることによって易しそうな数学の世界が広がる。この数学を証明するのではなく、世界を広げ楽しむことが可能なことは数学を楽しむことになる。