第 17 回福井高専グラフ電卓研究会（2016.6.18）

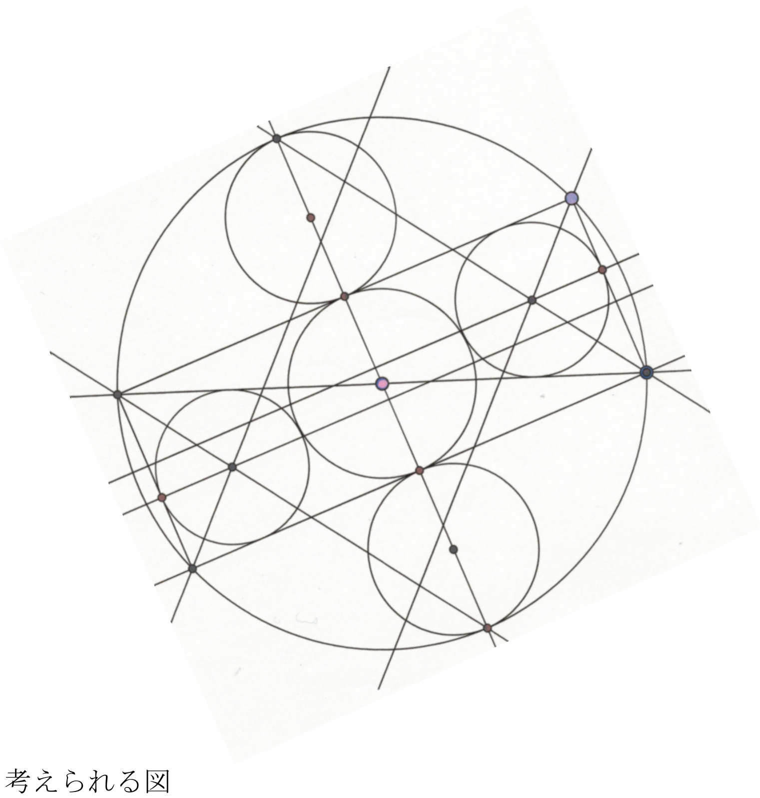
こんなところにピタゴラス三角形を発見

―問題発見と Technology の役割―

渡辺信 (生涯学習数学研究所)
longlifemath@gmail.com

１．和算（算法少女）の中で見つけた問題

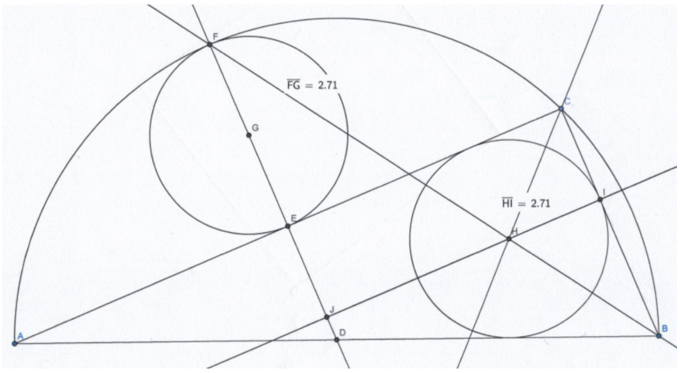
大円の中にある 2 つの小さな円が同じ大きさの時、この三角形の斜辺は 12 であるとある若い侍が算額を奉納しようとした。この時この算額を見た少女が 12 ではなく 13 であると指摘する場面から始まる「算法少女」は興味深い。少女はかつて三平方の定理を使って求めたことがあった。この経験からこの問題を見た少女の発言は正しかったが、間違えを指摘された侍はメンツをつぶされたことから小説の話が進展する。少女は計算した結果斜辺は 13 であることを知っていたことが前提になっている。それでは若者はどのように考えて 12 と求めたのかを考えたい。計算をした経験のある問題ならば、この問題は当時の和算家の間では有名であったのではなかろうか。そして問題を解く方法も三平方の定理を使うことが解っていた。この状況を前提にしたときに、算額奉納をしようとした若い侍の自信は問題が解けたという裏付けがあったに違いない。残念ながら侍が考えた解法は示されてはいない。侍は三平方の定理を知っていたにもかかわらず、その定理を使ったとは思えない。簡単な計算ミスであるならば気が付いたであろう。もっと興味深い図形的な解決方法を用いたのではなかろうか。何も書かれていないので下図のような 5 個の円はすべて等しいとして図が描ける。そして直径 4 の円であれば 12 という数字が出てくる。



侍が間違えたと考えられる図

「算法少女」の中に書かれた和算の簡単な問題
　　2つの小円が等しい時の大きな円の直径を求めよ

少女が示した 13 という数字が出てくる三角形はピタゴラス三角形（５,１２,１３）である。ピタゴラス三角形が問題の中に隠れていることは珍しい。斜辺が 13 という数字が出てきたときに、残りの辺に注目すると 5, 12 であったことは計算からも、図を描くことからもわかる。最近の数学ソフトは簡単に図を描くことができる。Technology が問題解決に役立つことは計算を始めるときにいろいろな予想が建てられる。

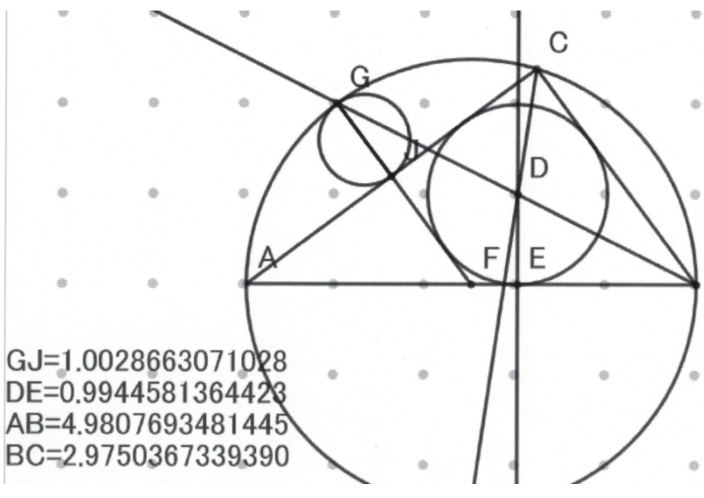


2つの小円が等しい時に大円と小円の直径は4対 13

弓型の中の最大の円と直角三角形の中の最大の円が同じ大きさのとき、斜辺（大円の直径）は 13 である。（５,１２,１３）のピタゴラス三角形が見える。このとき共通外接線は直角で交わっていることも見ることができるので図形の性質を知ることができる。ここに示された図形には誤差を含むので、正確には計算が必要である。何を計算したらよいかの方向が見えることは問題解決の方向性を示してくれる。問題はここで終わりであるが図形をいろいろと変えたときに不思議な三角形が見えてきた。この新しい問題の発見は Technology の使い方として興味がある。

２．数学の問題はどこにあるのか

円の中にある直角三角形を動かすと小円の半径が変わる。この変化を見たい。2つの小円が同じのときにピタゴラスの三角形が出てくるのは面白い。そこでもっとよく知られているピタゴラス三角形になるときの2つの円の関係を眺めたい。



大きな円の直径 AB=4.980・・・≒5 であり BC=2.975・・・≒3 になっている。残りの辺 AC≒4 で（3,4,5）のピタゴラス三角形に近い形ができている。

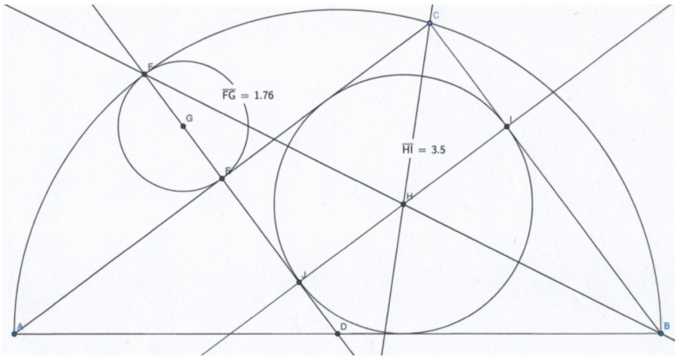
「測定」を利用して長さを測りながら図を動かしてみた。ピタゴラス三角形のとき 2 つの円の関係が１：２になっているようにみえる。長さの数値は半径で

GJ=1.00：DE=0.99＝１：１

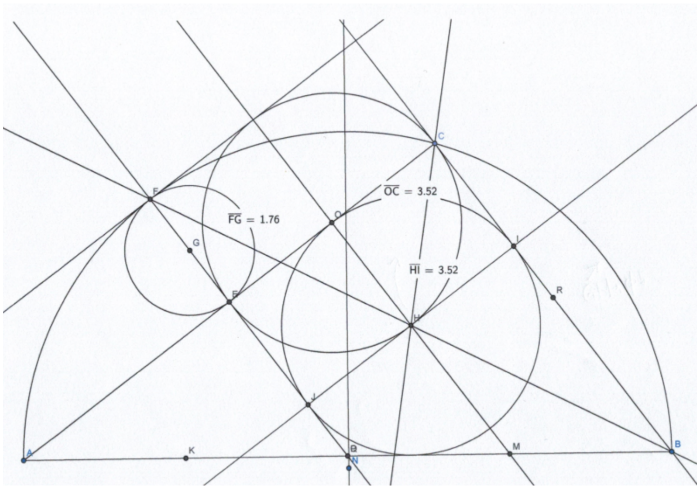
になっている。半径が 2 倍になっているときに、ピタゴラス三角形が現れるのであろうか。

この図を見ていると右円は小さい円の中心をとおる半径が作る四角形に接しているように見える。いろいろな関係があるように見えるので確かめてみたい。図を動かすことによって問題を見つけることができる。図を描いて測定しただけではそこから出てくる結果は誤差を含むために正しいかは解らないので、きちんと説明するためには計算と証明が必要である。

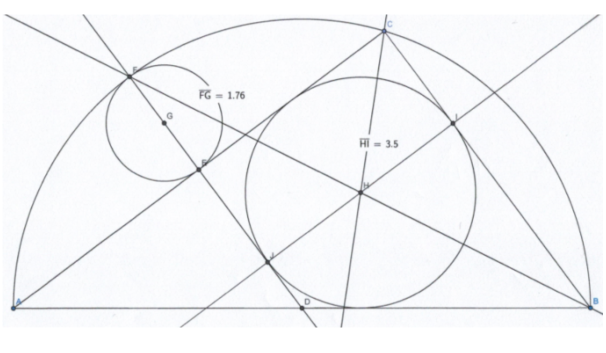
問題　算法少女では同じ円が問題になっている。そこで中円の半径が小円の半径の 2 倍の場合を考えてみたい。結果は解らないがどのような図形になるかは大円の醜状の点を動かすことによって図形は簡単に描ける。

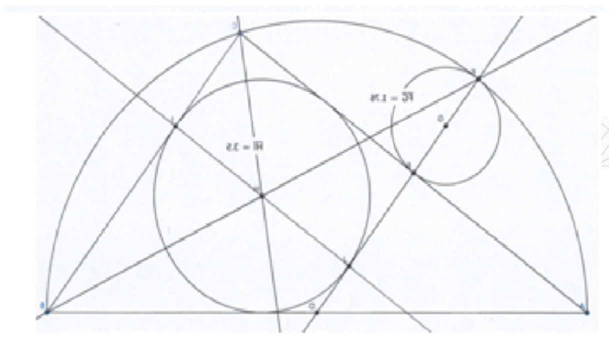


小円の 2 倍の中円は四角形に内接している（3，4，5）のピタゴラス三角形が出てくる



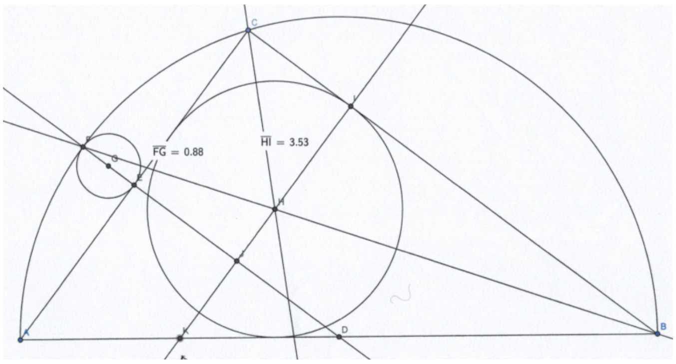
新しく引いた直線が半径の右側中点を通っていることが分かる。また正方形が見える。
何か新しい関係が見えないであろうか。直線が半径の左側中点を通るように動かしてみた。





反転した図を作り、左側の狭い弓型の中に小円を描いてみるとどのような関係になるかを考えてみる

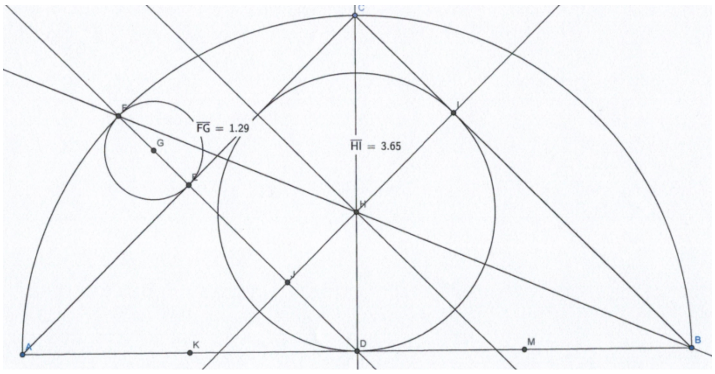
のも面白そうである。
そして測定を使うことによって 2 つの円の関係が見えてきた。これは 4 倍の図であることが分かる。



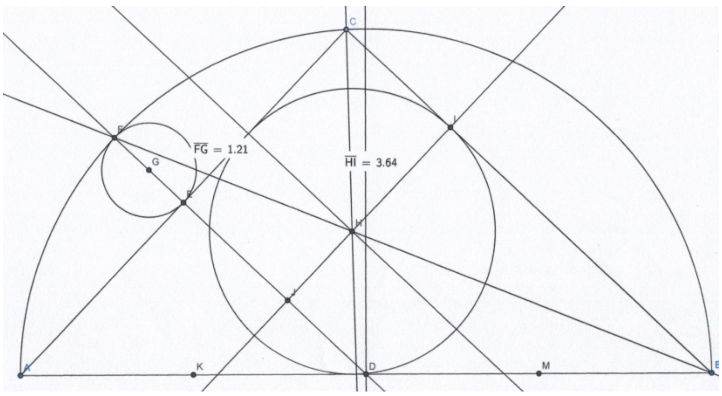
2 倍の図を反転し、新しい小円を作った図

反転をした図の中に描いたので三角形はピタゴラス三角形（3,4,5）でこのときに小円の半径の 4 倍になっている。

この結果から調べてみたいことは 3 倍になるときはどのような図形になるかを考えたい。予想としてすぐに出てくる図は大円の頂点（中点）のときに 3 倍の図が描けるのではないかと考えられる。しかしもし中点に取ったときにできる三角形は直角二等辺三角形になりピタゴラス三角形ではなくなってしまう。期待したいことは大円の半円上の中点を通っていたらピタゴラス三角形にならないので、美しさがなくなってしまう。図を描いてみると 3 倍の時中点かどうかは微妙であった。



しかし中点のとると 3 倍にはならない。正確な図は違っている。



3 倍になるときは中点とは明らかに違っていて、このときにできる三角形は直角 2 等辺三角形に非常に

近いピタゴラス三角形であることが分かる。

いくら正しいと思って図を描いてもその図を信用することはできない。しかし Technology によって新しい問題が見えてくる。この問題をきちんと証明することによって「数学の問題」になる。図を見ながら楽しい興味深い時間を過ごした。この図に対して予想として正しい数学になるかは実際に証明が必要である。Technology が見せてくれる問題であり、実際に数学の問題を発見することは、具体的に Technology によって「数学実験」を簡単に行うことができる。

数学の問題は予想外に簡単なところにあるような感じがする。

数学の問題 中円の半径が小円の半径のｎ倍のとき、そこにできる三角形は常にピタゴラス三角形になるか

この問題を言い換えて、

数学の問題 ピタゴラス三角形になるとき、中円の半径が小円の半径のｎ倍になるか

計算結果

円の比とピタゴラス三角形

円の比	Ｒ１	Ｒ２	ピタゴラス三角形	
1倍	4	4	（ 5, 12, 13）	算法少女の問題
2	1	2	（ 3, 4, 5）	
3	4	12	（20, 21, 29）	直角等辺に似ている
4	1	4	（ 6, 8, 10）	2倍の反転
5	4	20	（28, 45, 53）	
6	1	6	（ 8, 15, 17）	
7	4	28	（36, 77, 85）	
8	1	8	（10, 24, 26）	1倍の反転
9				ｎ＝９以降の奇数は存在しない？
10	1	10	（12, 35, 37）	
11				
12	1	12	（14, 48, 50）	
13				
14	1	14	（16, 63, 65）	
15				
16	1	１６	（18, 80, 82）	