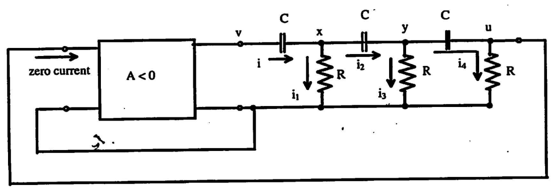
# 数楽通信⑨　$\sqrt{-1}$ のお蔭で働く　有名な電気回路 とディズニー

H27.6.19

次の図は、有名なアンプ(増幅器)の回路です。抵抗やコンデンサーからできている交流の電子回路(Electronic Circuit)です。数億分の一アンペアの入力電流でも動作します。




この回路を取り上げた理由は、まず一つこの回路を出発点とした会社の株式の価値は、現在数十億ドルになっているのです。この回路の素晴らしいところは、どんな小さな入力からでも任意の周波数の出力を取り出し、増幅することができるところです。みなさんテレビの放送時間が終わった後のテレビ画面を見たことがありますか?画面に白いチカチカが点滅していますね。これを「snow」といったりしますが、これは電気的雑音によるものです。テレビの映像を運んでくる電波は、信号です。しかし、それ以外の電波が自然界には無数に存在します。役に立つ信号以外の電波を雑音(ﾉｲｽﾞ　noise)といいます。光の白色は、すべての波長の光を含んでいるから白になります。あらゆる周波数の電波を含む雑音を同様に、白色雑音(ﾎﾜｲﾄﾉｲｽﾞ　white noise)といいます。信号は規則的な周期を持っており、1 年で習った三角比(sin,cos)で表せます。この回路は、特定の周波数の電流だけを取り出すことが出来、その仕組みからフィードバック発振機といわれます。

次に、この回路を表す方程式(微分方程式といいます)と、その解を載せます。

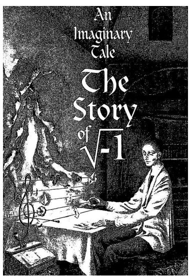
$$\frac{d^3v}{dt^3}=\frac{d^3u}{dt^3}+\frac{6}{RC}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{5}{(RC)^2}\frac{du}{dt}+\frac{1}{(RC)^3}u.$$

方程式には、 j がないのにその解には j が現れることに注目して下さい。j　は今習っている虚数 i を表します。電気では、 i　は電流そのものをあらわすので j を使うのです。解の分母の+の書き込みは、ミスプリントを訂正したものです。

j すなわち i の現れるわけは、「博士の愛した数式」$e^{\pi i}= -1$ と密接な関係があります。

$$\frac{U^+}{V^+}=\frac{-j\omega^3}{\left(\frac{1}{RC}\right)^3-\frac{6\omega^2}{RC}\underset{+}{-}j\omega\left[\frac{5}{(RC)^2}-\omega^2\right]}.$$

この特別な発振機の基礎となる製品は、1930 年代の終わり頃、スタンフォード大学の大学院生 William Hewlett と David Packard　により、開発されました。そう、先の会社の株式価値が、現在数十億ドルになっている会社というのはヒューレット・パッカードです。




彼らは、これを使って、sound-generator　をつくり、それを Walt　Disney に売り込みました。 Walt Disney は、これを音声効果(audio　effect)を産み出すために使いました。

そして、 Disney　初の長編アニメ第 3 作であり、史上初のステレオ音声作品である「Fantasia」では、その効果が観客を魅了したのです。「Fantasia」は、ディズニーのみならず、アニメの古典(classic)として、記念碑的作品となっています。修学旅行でﾃﾞｨｽﾞﾆｰﾗﾝﾄﾞへ行く人は、おとぎの国の裏側では、魔法だけでなく、数学も i も働いていること頭に入れ、楽しんで来て下さい。

「*An Imaginary Tale The Story of* $\sqrt{-1}$ 」*Paul.J.Nahin* より

## 虚数の性質と計算復習

数楽通信⑧でも､述べましたが　テスト前ですので　虚数の性質について復習しましょう。

虚数単位　$i=\sqrt{-1}$

よく質問がでてきた　$\sqrt{-3}\sqrt{-2}=\sqrt{(-3)(-2)}=\sqrt{6}$　とできないことについてもう一度説明しましょう。

きちんと、理解・納得できていないことは、定期試験ではかろうじてできても、少し時間がたった実力テストなどでは、全くできなくなってしまいます。皆さんは、普通科のように数学に時間をかけられないから、なおのことです。しかし、これを理解すれば、虚数の計算はずっとできるようになります。

まず、一年の今頃、a,b　が正の時は、　$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　がなぜ成り立ったか振り返ってみましょう。

それは、両辺を二乗すれば、右辺は√の定義から　$(\sqrt{ab})^2=ab$

左辺は、掛け算の順序が交換できることから

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b}=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2$$

となり

やはり、√の定義から ab となるからでした。

ここで、二乗して等しくなったのですが、これからだけでは、$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ は、いえません。$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$　かもしれないからです。

しかし、√の定義　「２つある平方根のうち、正の方を表す。」という約束があるから、もともと２つの正のものを二乗して等しくなったので、もとの２つは等しいといえるのです。

ところが　$i=\sqrt{-1}$　は、想像上の数、正の数でも負の数でもないので

二乗して等しくなっても、なにもいえないのです。それどころか、上の式の両辺は二乗して－１となりますが(そう決めたのでしたね。)、

$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$　と計算すると、１と全く違った答えになるのです。
a,b が正と負なら、成り立つことも確認してください。

ですから、√の中が負の時は、たとえば　$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\sqrt{-1}=\sqrt{3}\,i$

のように　i でまず表すのです。

それから i　は普通の文字と同じように　計算すればよろしい。　a や x　と同じですね。

2+3i-(4-3i)=-2+6i　(-と(　)には気をつける) ただ $i^2$ が出てきたときは　-1　とします。

このときも、割り算・分母の実数化では、公式②が活躍します。

$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$

これは練習して、覚えて使えるようにしましょう。

a+bi　と　a-bi　は共役複素数といいます、役は昔は軛(訓読み：くびき)と書いていました。右の図のように、牛、馬など、を馬車、牛車に繋ぐ際に用いる木製の棒状器具で、二つセットというイメージでしょう