

# ポップアップによる幾何模型

第18回グラフ電卓研究会  
福井高専  
2017.6.10



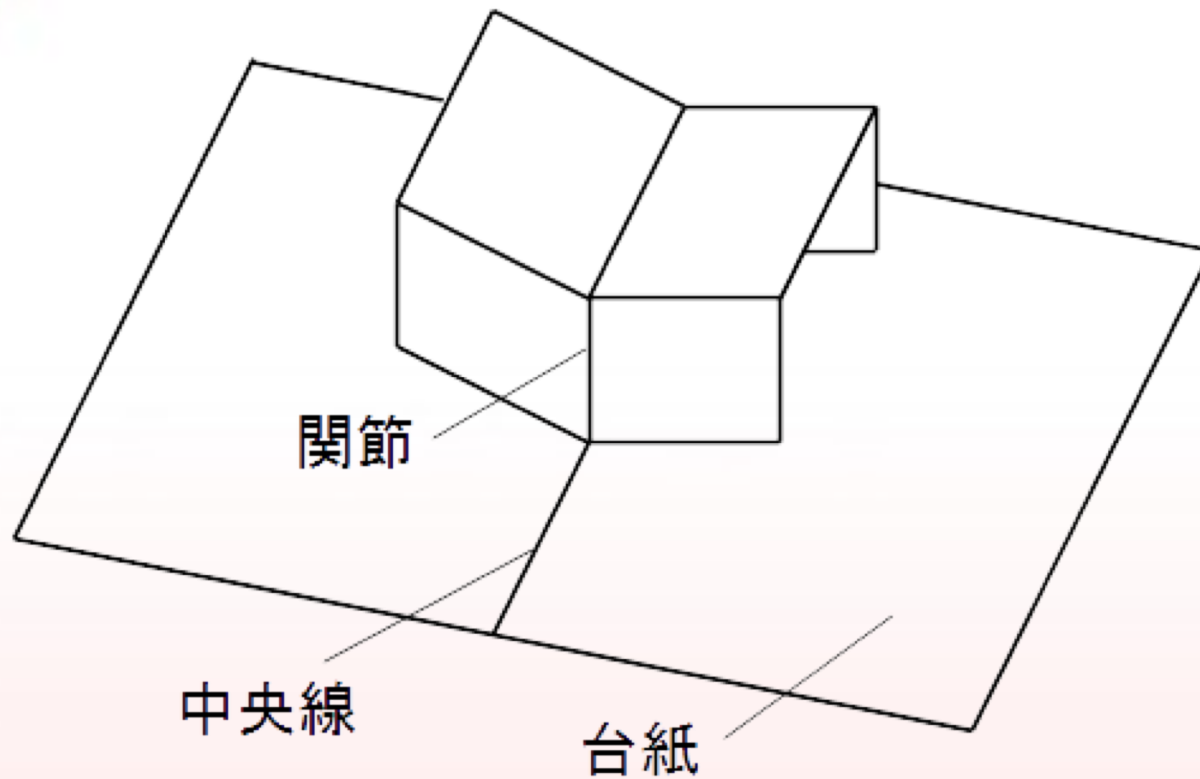
福井大学教育学部  
西村保三

# ポップアップによる幾何模型

- 目標：正多面体・二次曲面のポップアップ模型
- 持ち運びに便利
- 立体化する過程が面白い
- 動的で連続的な立体の変化
- 展開図や立体の断面図に注目させられる
- 数学ソフトウェアで図面を作成



# ポップアップ・ブック(カード)



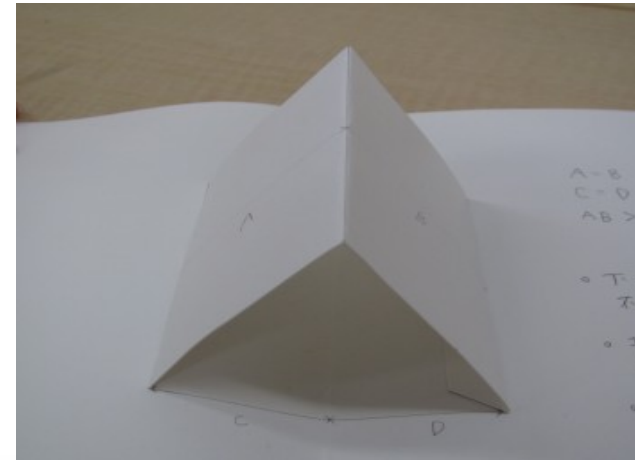
- 90度開き
- 180度開き
- その他

# ポップアップの基本形

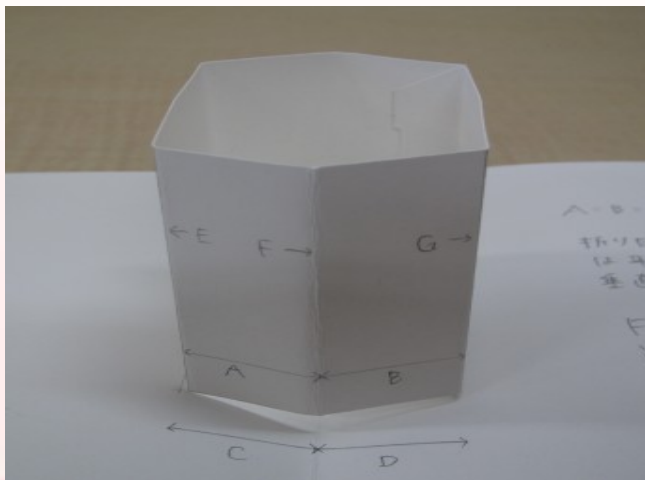
step-fold



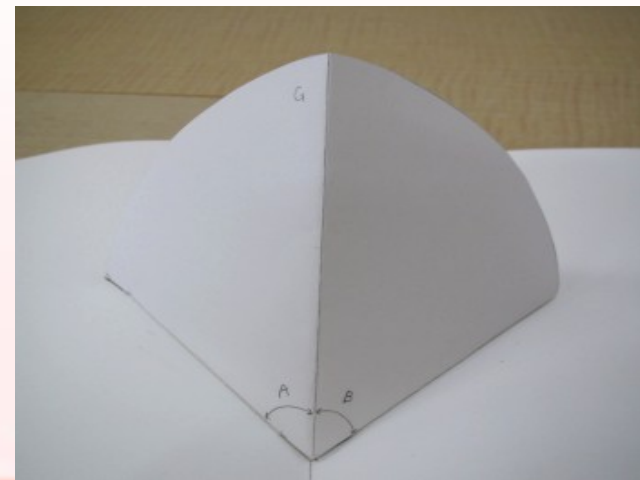
tent-fold



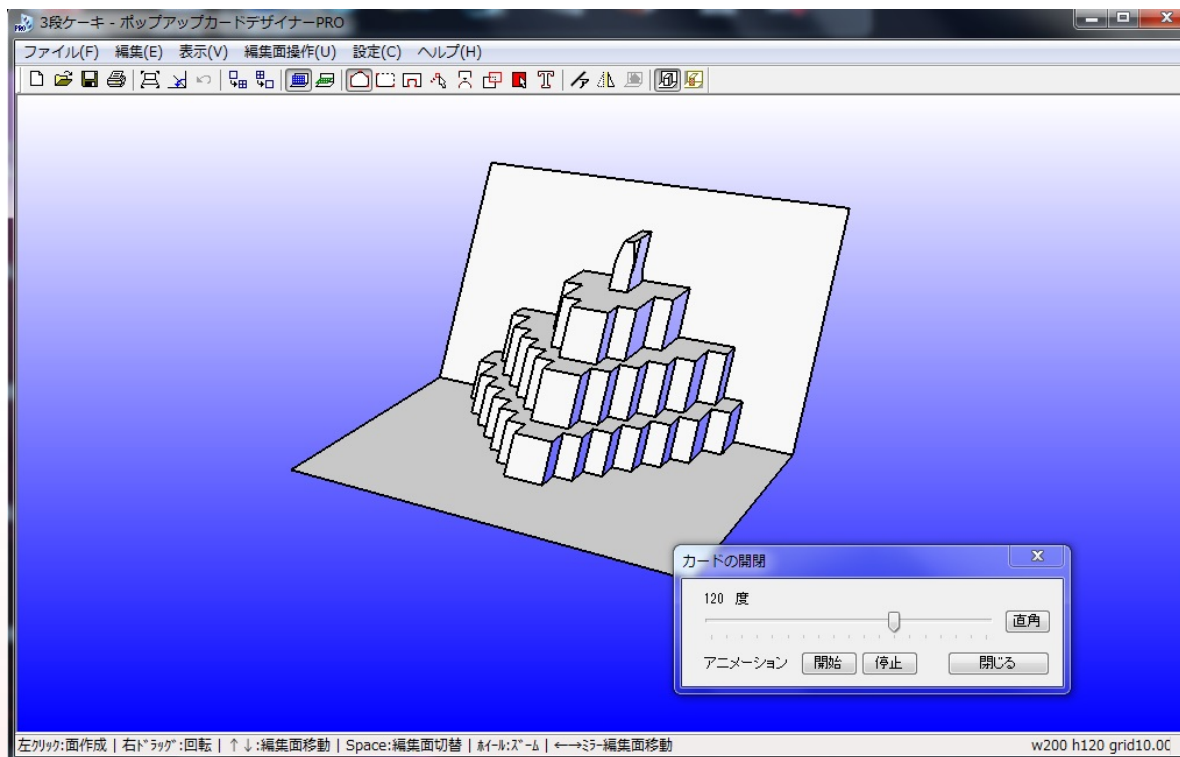
box-fold



v-fold

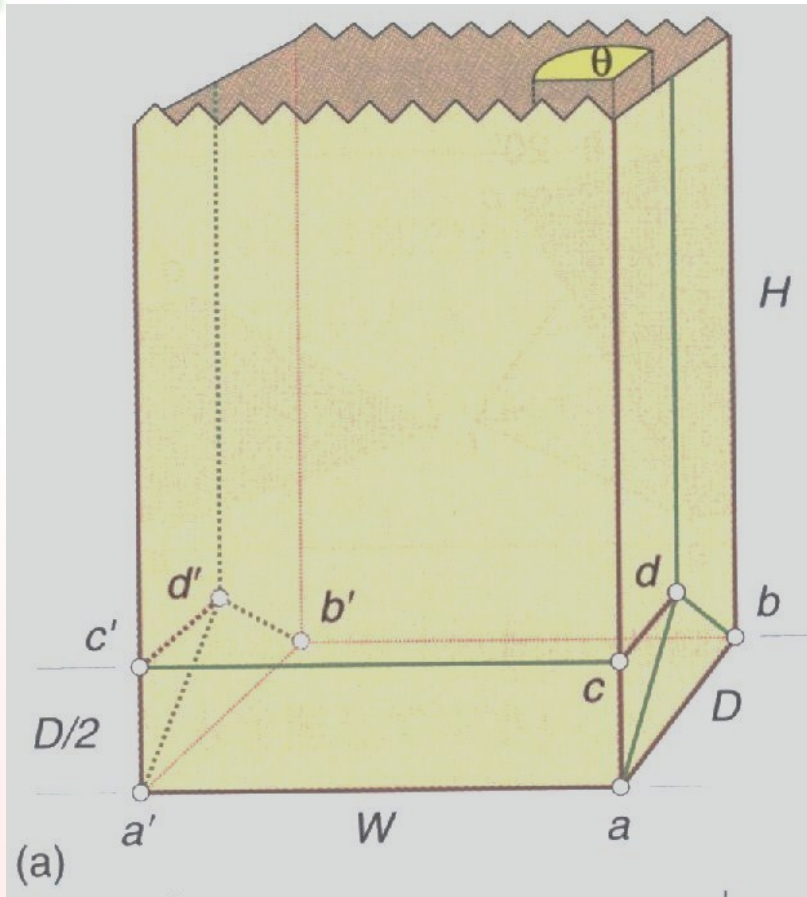


# ポップアップカードデザイナーPRO



[サンプルファイル](#)

# 紙袋定理



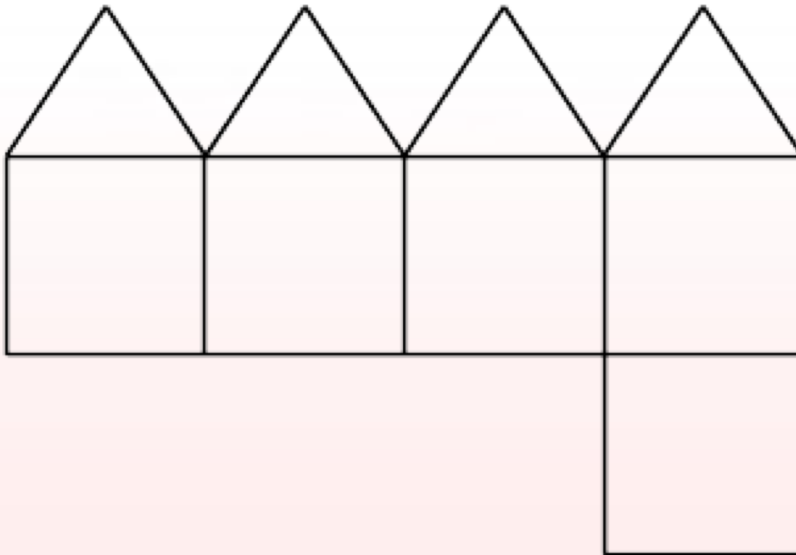
$H \geq \frac{1}{2}D$  のとき, 紙袋の各面が剛体でできていたとすると, 紙袋は完全に開いた状態か, 閉じた状態の配置しかとることができない。

⇒紙袋で直方体のポップアップ模型はできない

# コーシーの剛性定理

対応する面が互いに合同で、組み合わせ同型な2つの凸多面体は、合同である。

⇒凸多面体は、展開図から一意的に決まる



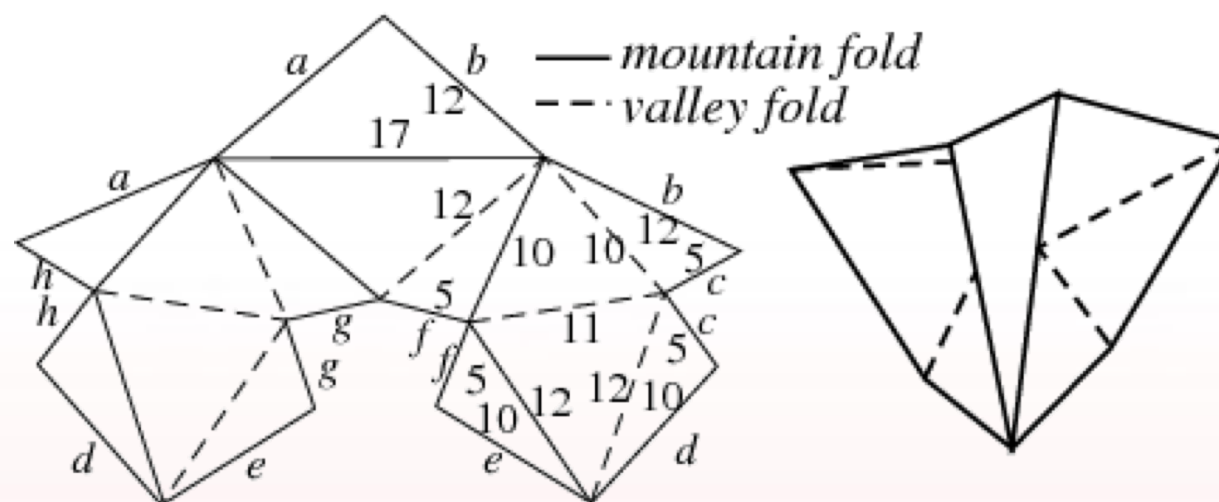
立体異性体



# 柔軟な多面体

ブリカール(1897): 自己交差のある柔軟多面体

コネリー(1978): 柔軟な多面体の発見

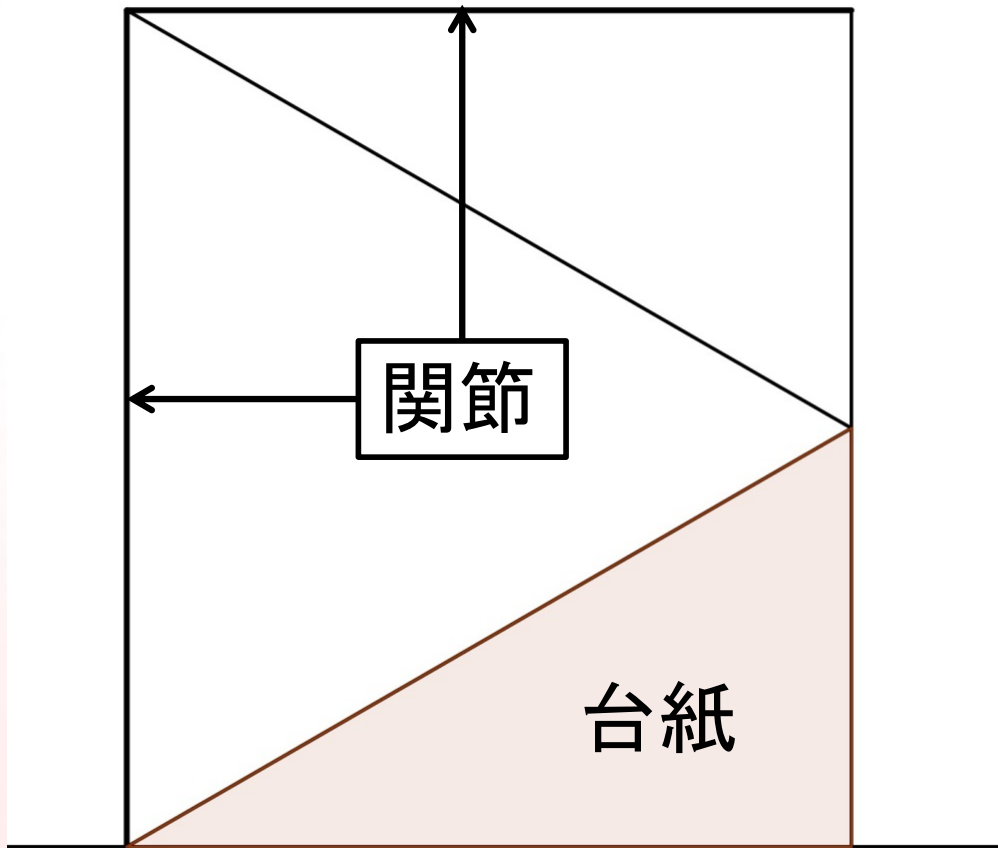


コネリー他(1997): ふいご予想の解決

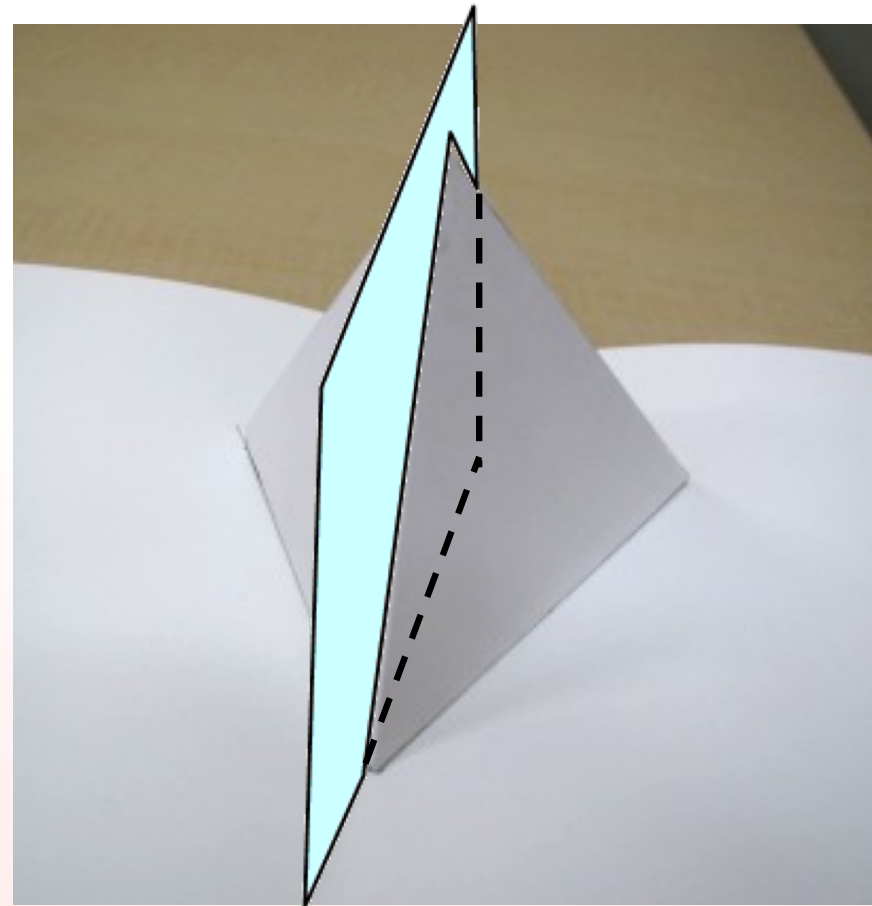
⇒ 多面体のポップアップは、辺を切る必要がある

# 正四面体

## 半折図



## 鏡映面

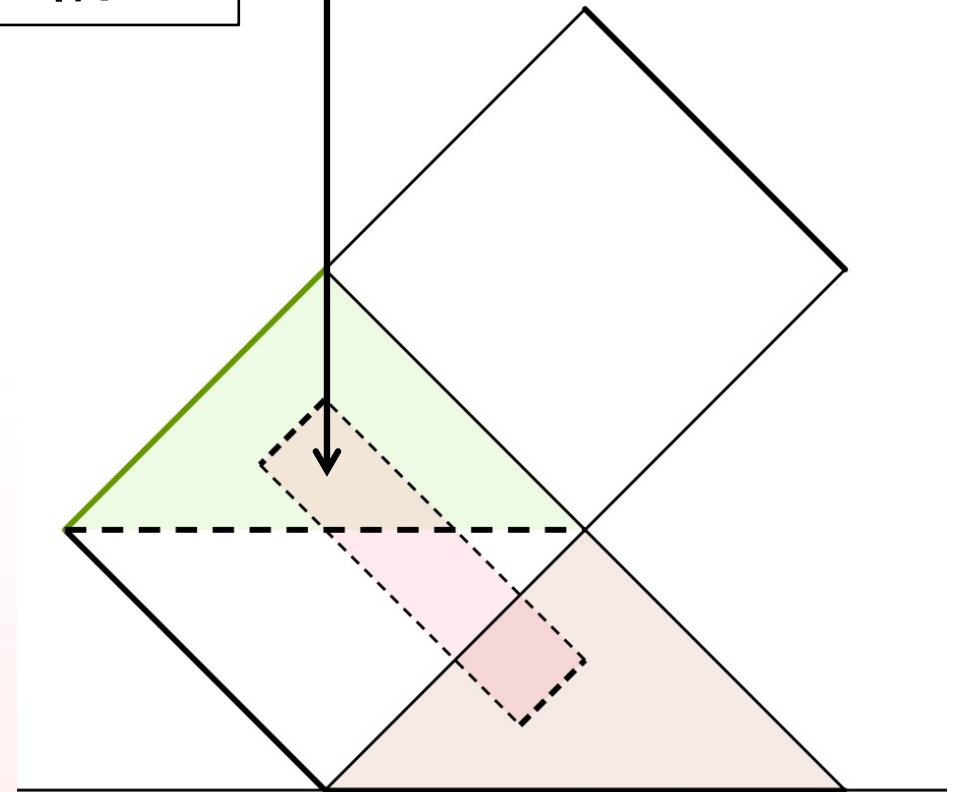
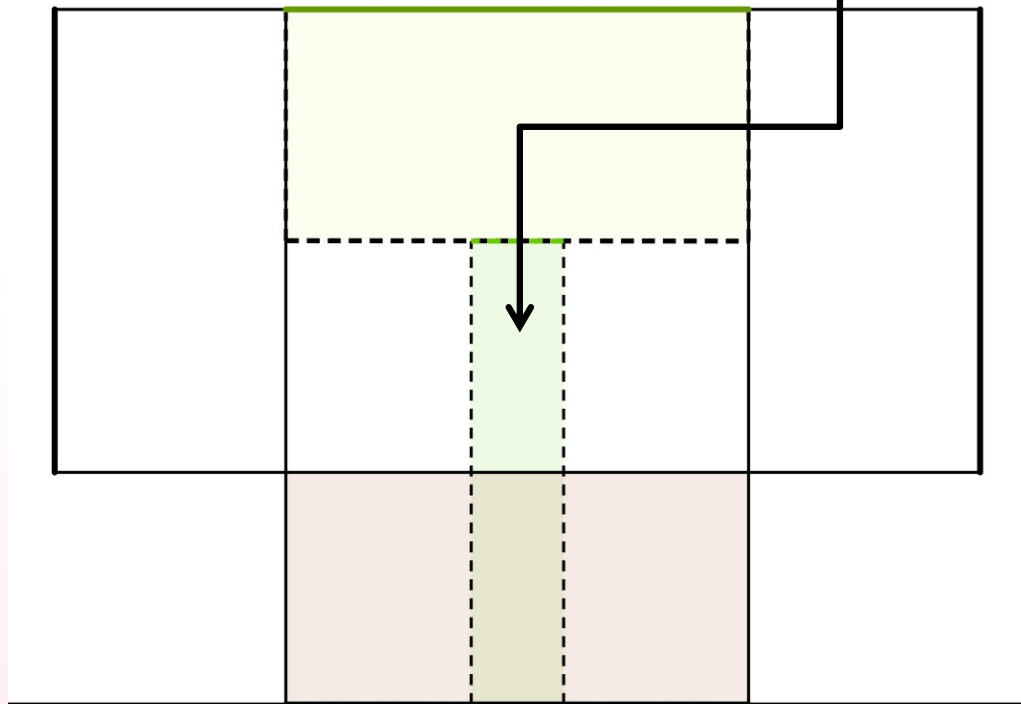


# 正六面体

平行折り

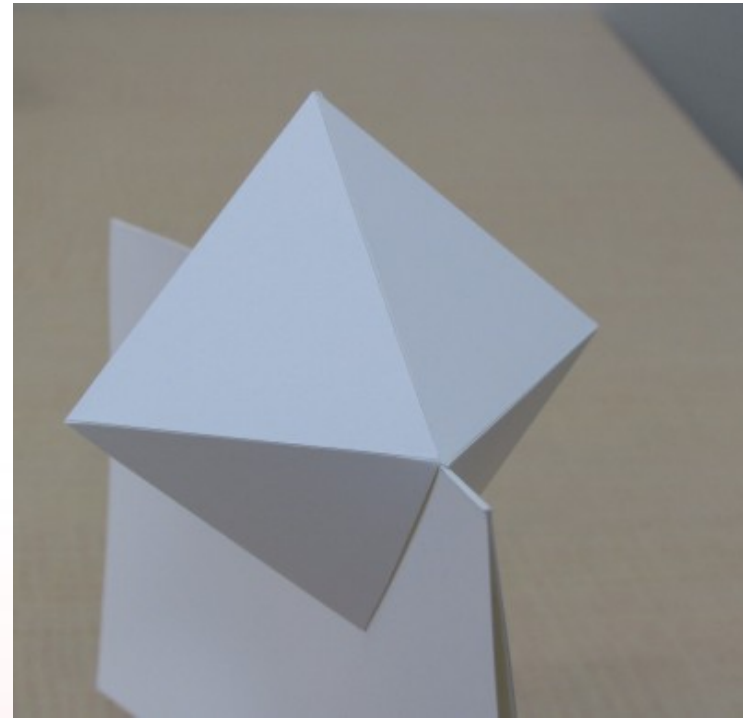
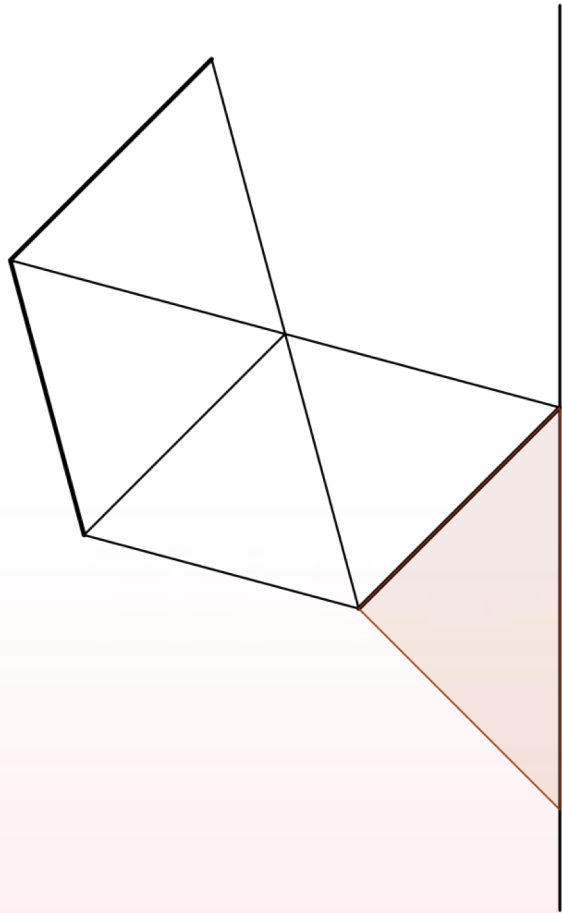
内部の柱構造

斜め折り



(参考) 実物で学ぶ仕掛け絵本の基礎知識 ポップアップ

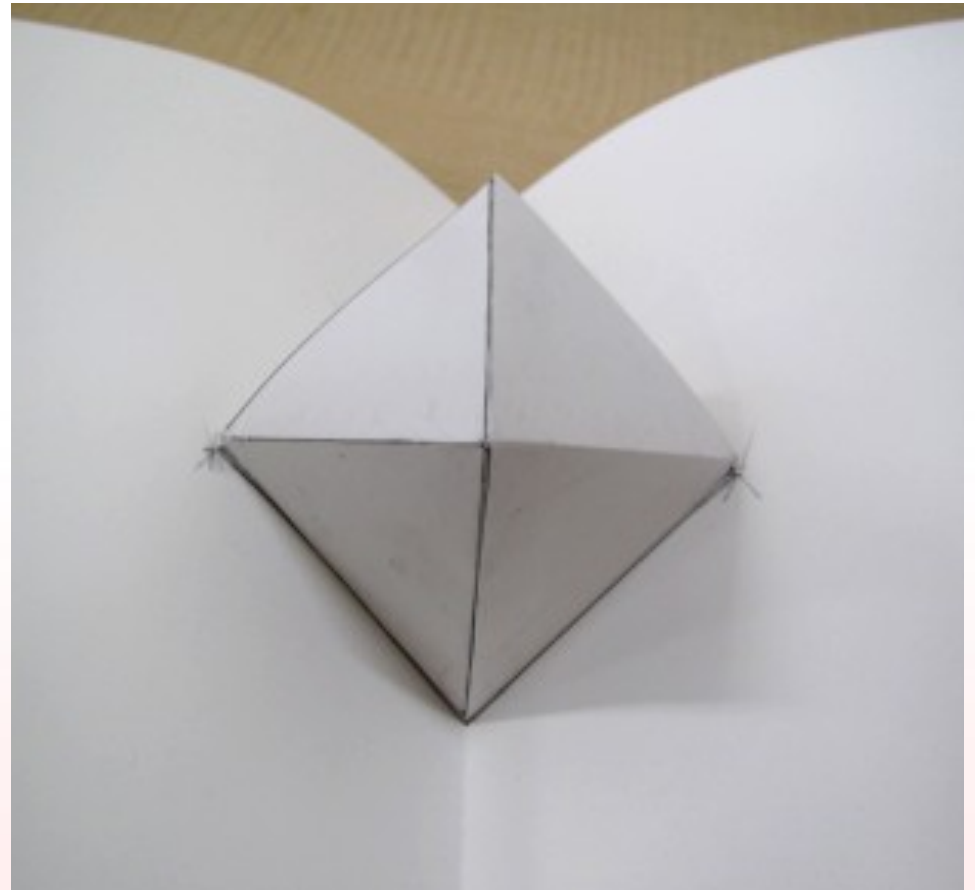
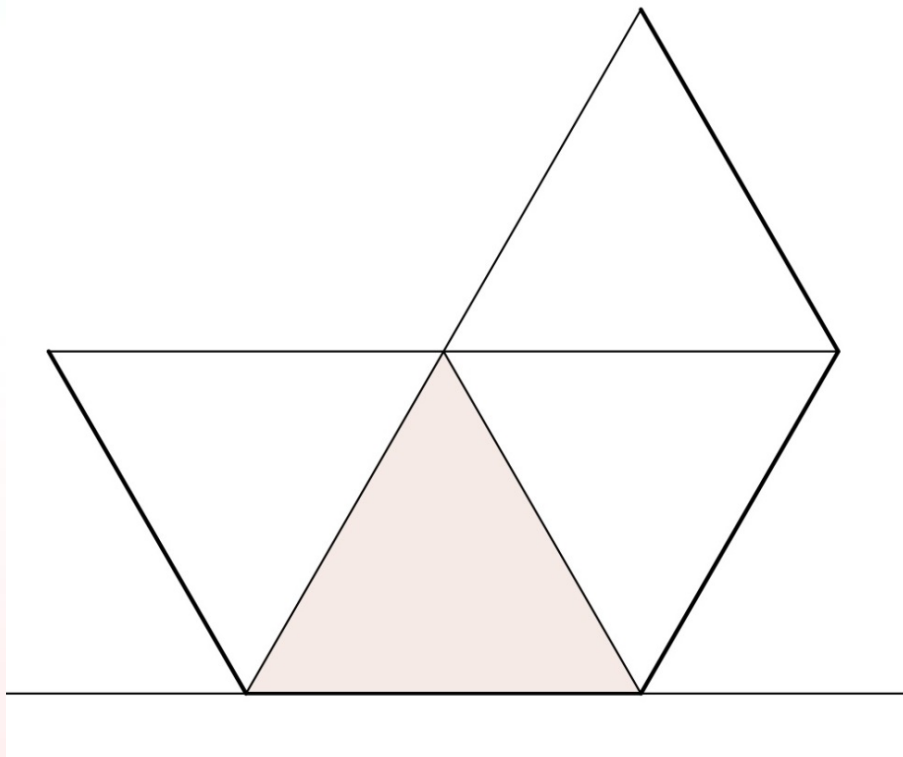
# 正八面体(360度)



(参考) 茶谷・中沢『飛び出すペーパークラフト』

# 正八面体(109度)

2面固定



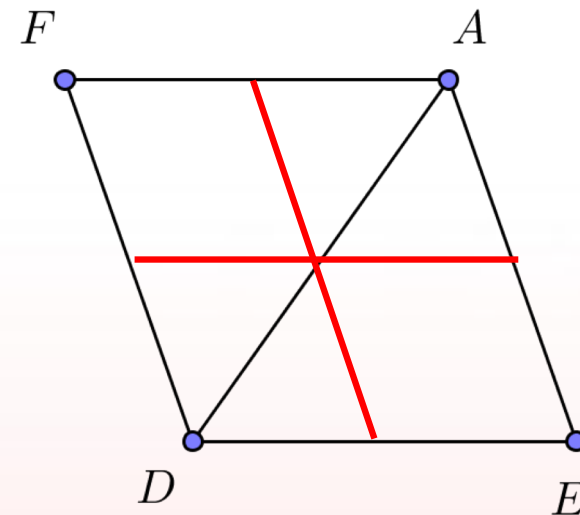
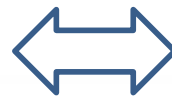
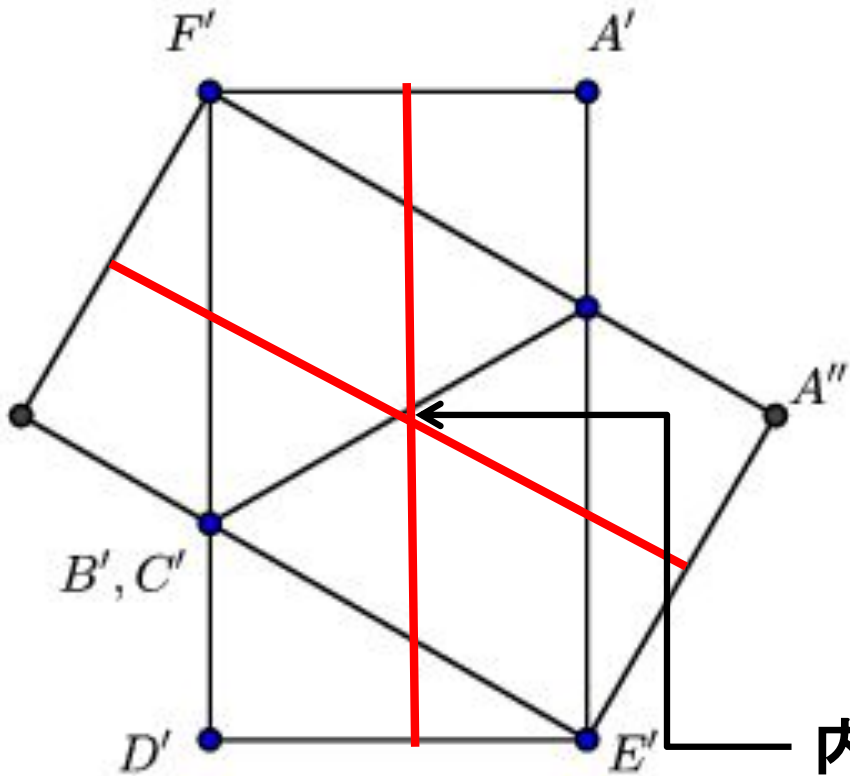
(参考) David Cassell “Pop-up polyhedra” (1988)



# 正八面体(180度)

平坦化(半折図)

立体化(正投影図)

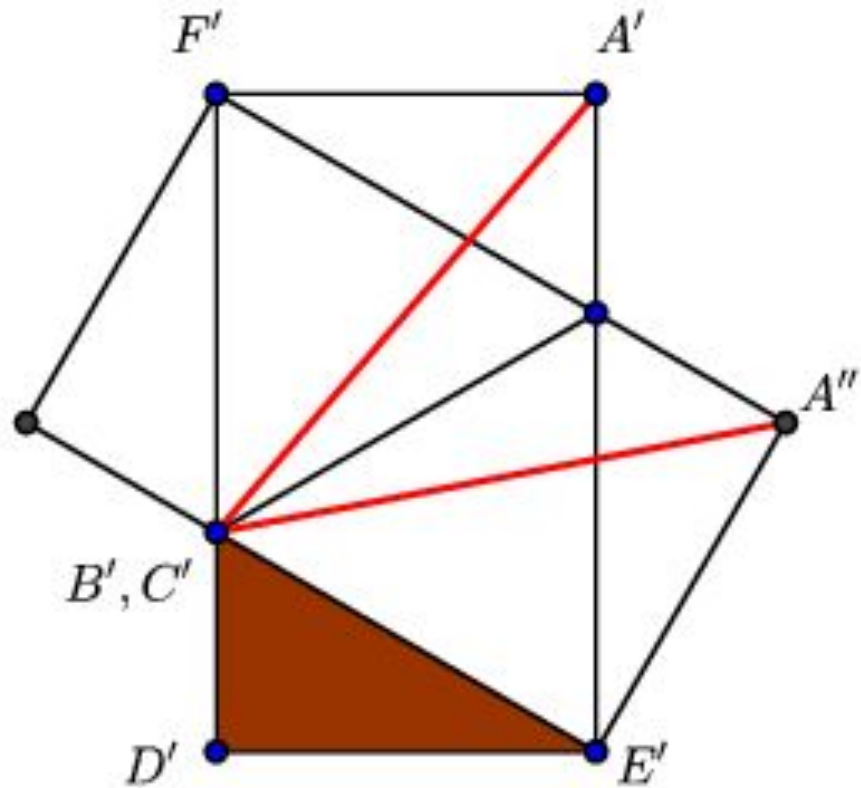


内部にゴムを付ける

Scott Johnson & Hans Walser (1997)

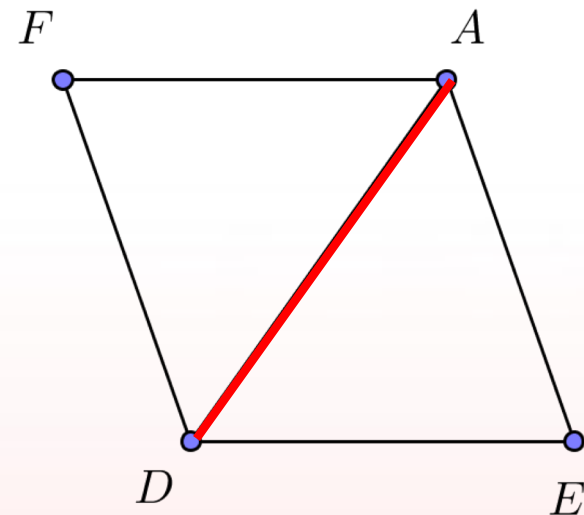
# 正八面体(180度)

平坦化([半折图](#))



$$A'B' = A''B' = L = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

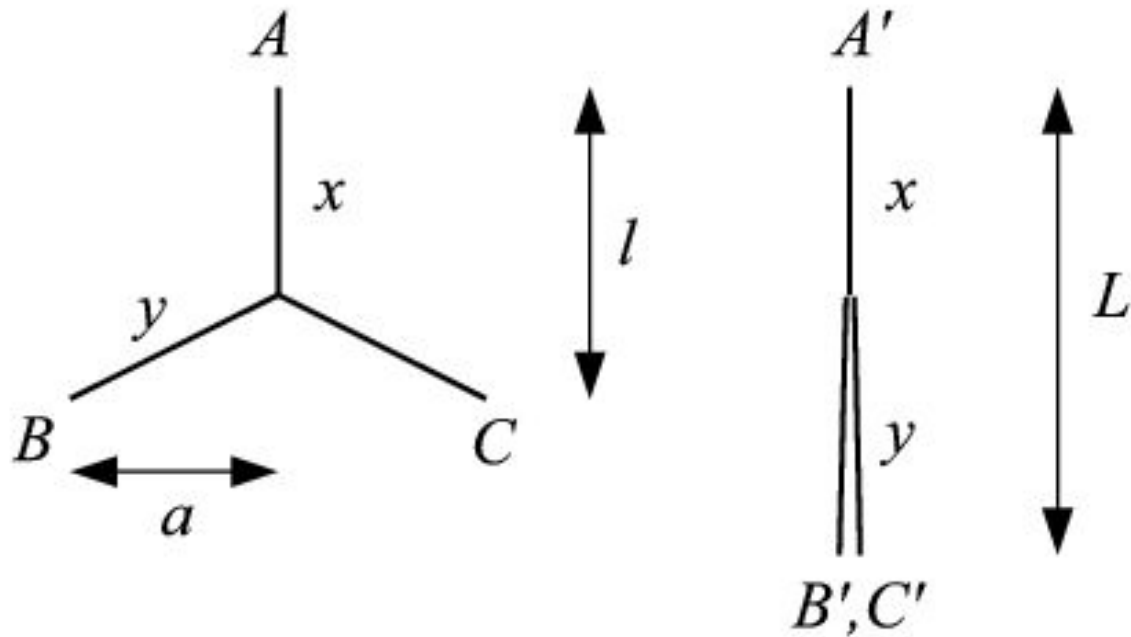
立体化(正投影图)



$$AD = l = 1$$

# 正八面体(180度)

内部にY字型に糸を張る

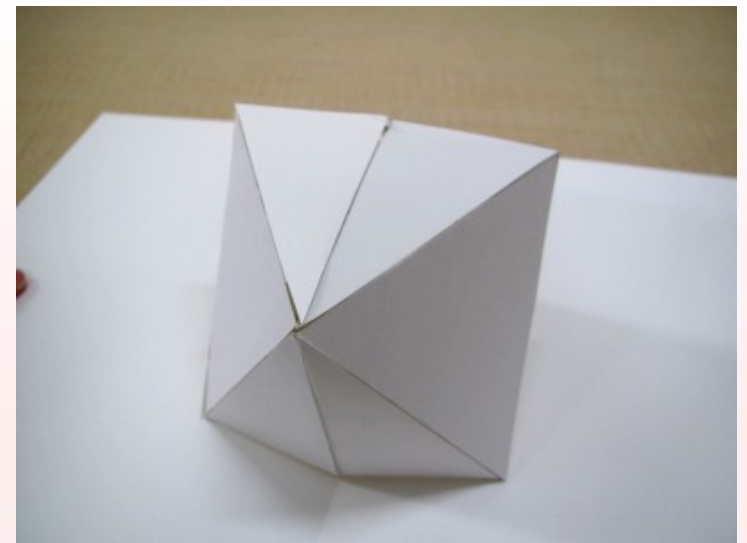


$$x + y = L$$

$$x + \sqrt{y^2 - a^2} = l$$

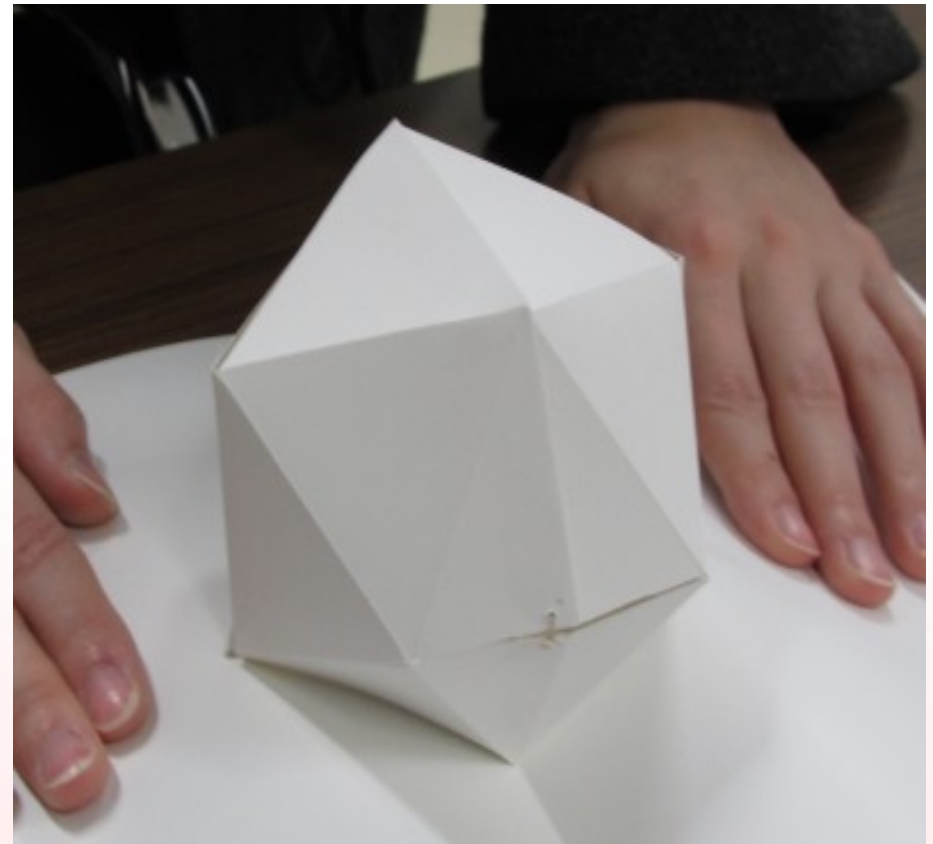
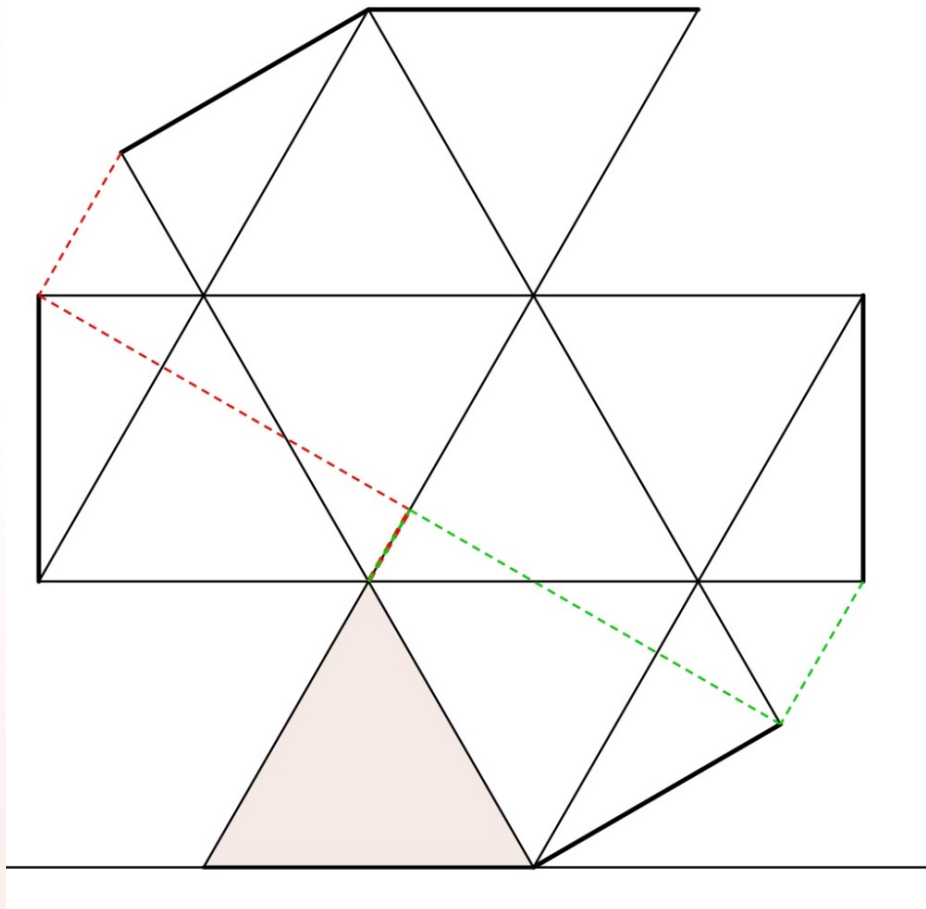
$$x = 0.774, y = 0.549$$

$$l = 1, a = 0.5, L = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1.323$$



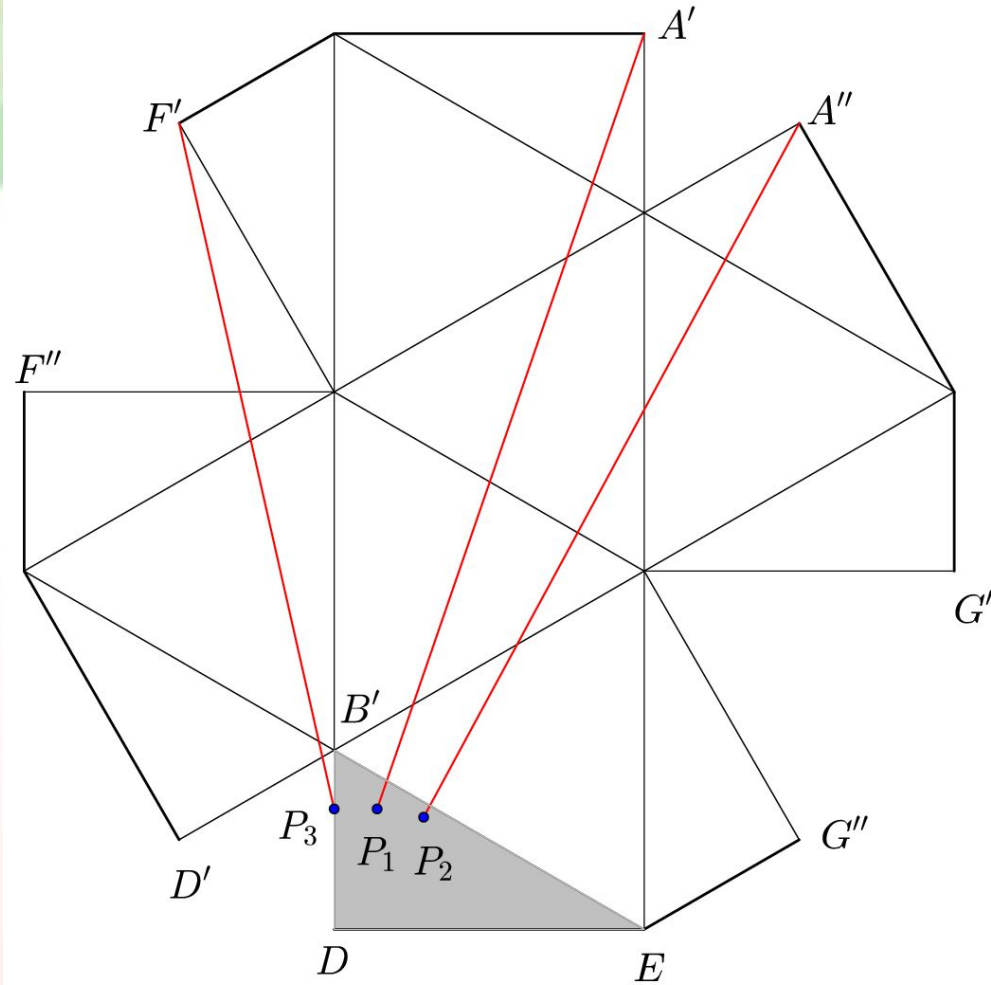
# 正二十面体(138度)

2面を固定, 内部に糸を張る

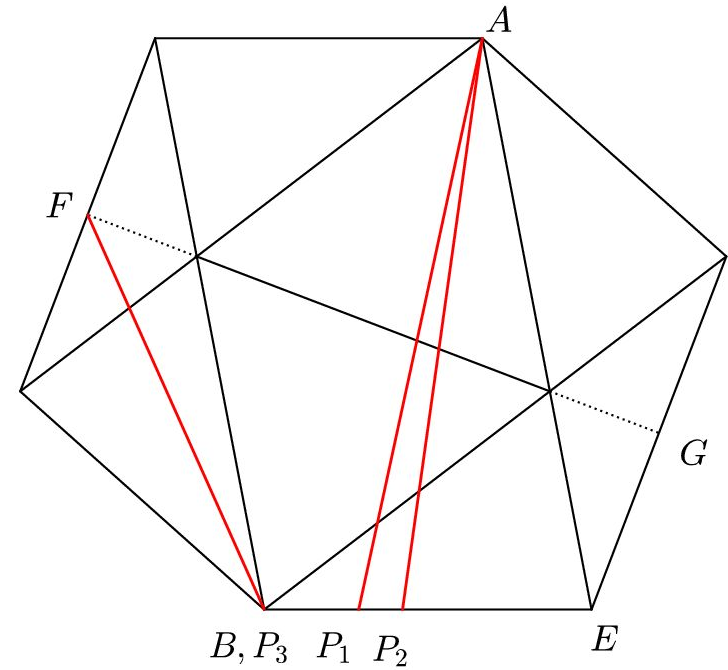


佐久間菜摘, 梶原有紀, 吉田隆(2008)

# 正二十面体(180度)



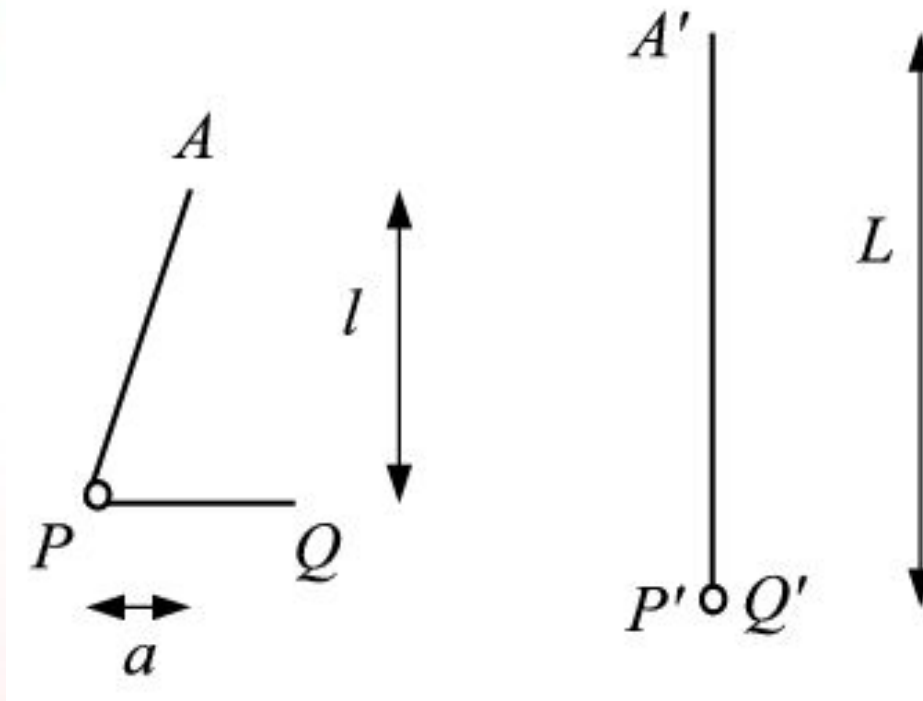
立体图



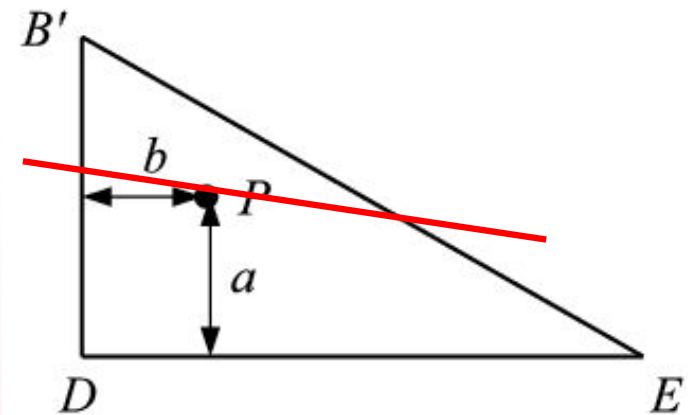


# 正二十面体(180度)

内部にL字型に糸を張る(Pは9環)



P, Qの位置の決め方



$$A'P_1 = L_1 = \sqrt{(2.5 - a)^2 + (0.866 - b)^2} = l_1 + 2a$$

$$AP = l_1 = \sqrt{(0.577 - a)^2 + 1.512^2 + a^2}$$

$$a \approx -0.08b + 0.332$$

$$a = 0.336, b = 0.12$$

# 正十二面体

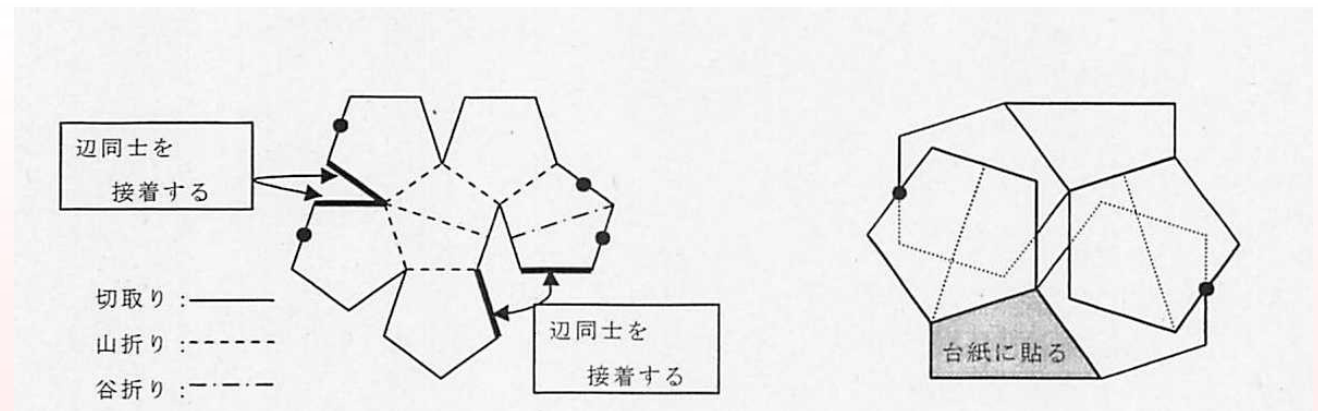
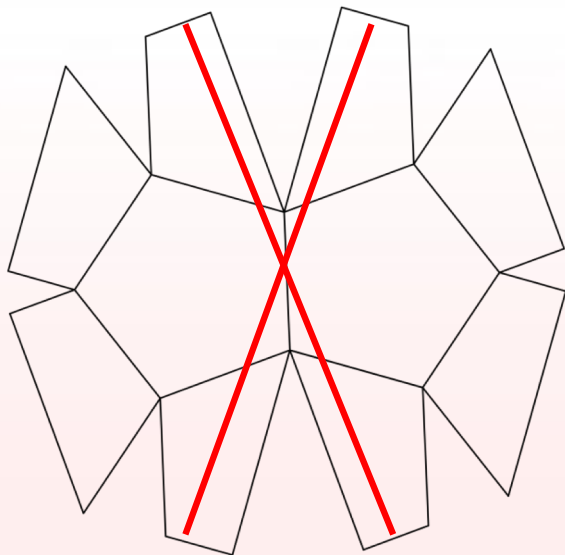
Scott Johnson&Hans Walser (1997)

edge-jumping model: ゴムによる立体化

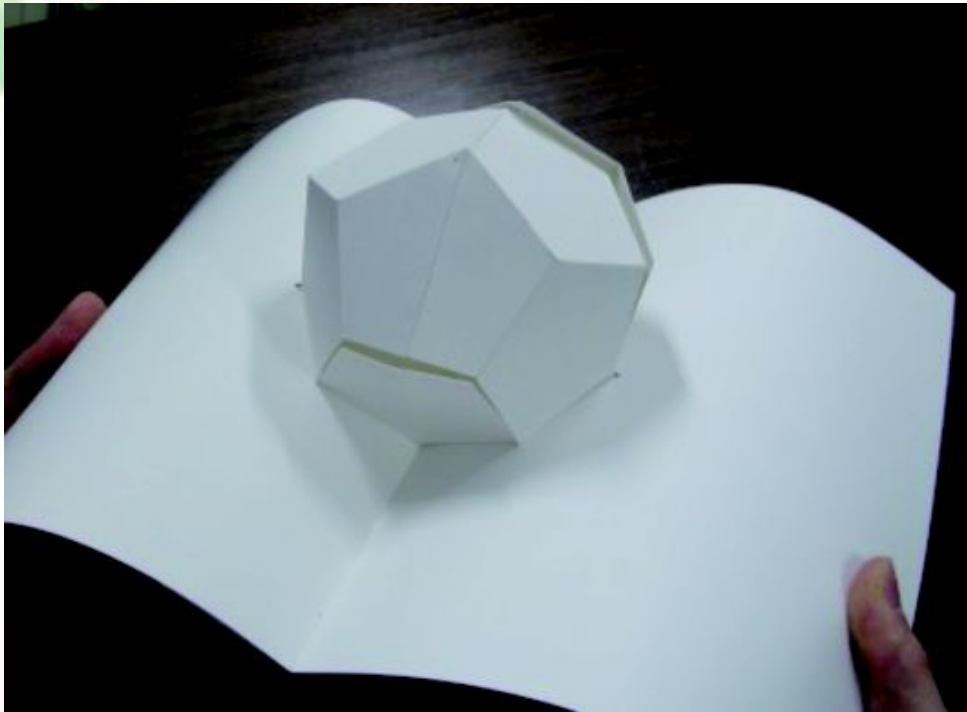
spiral model: 提灯状に畳み, 両側から紐を引っ張って立体化

佐久間・梶原・吉野(2008)

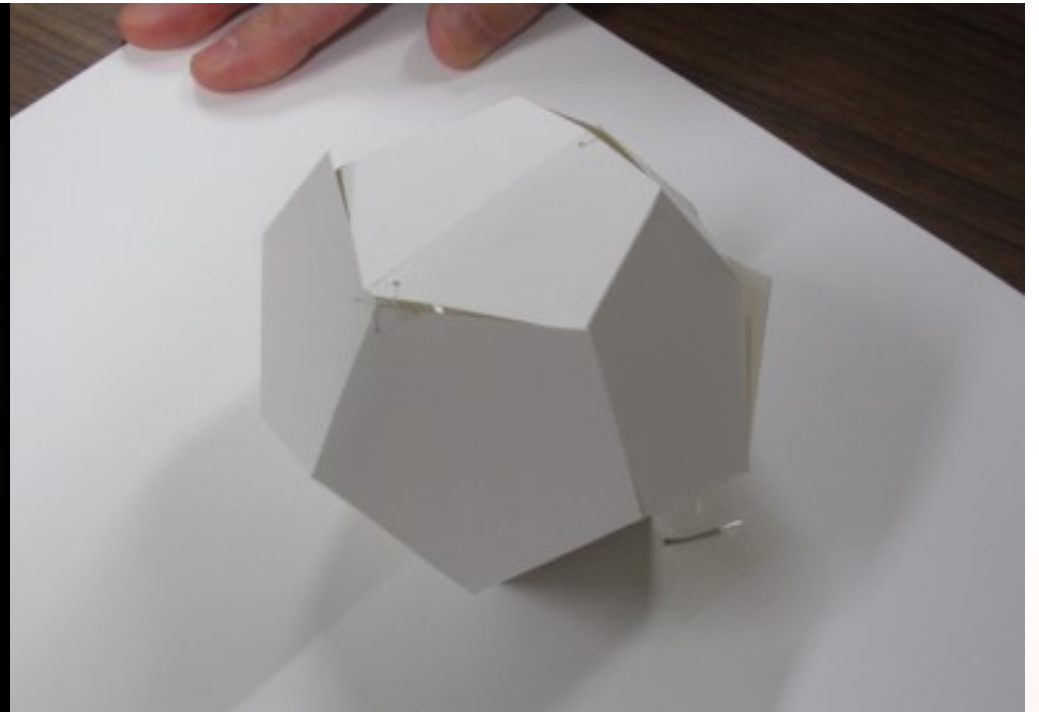
180度。上下6面が, 4箇所を点のみで糸で固定される



# 正十二面体



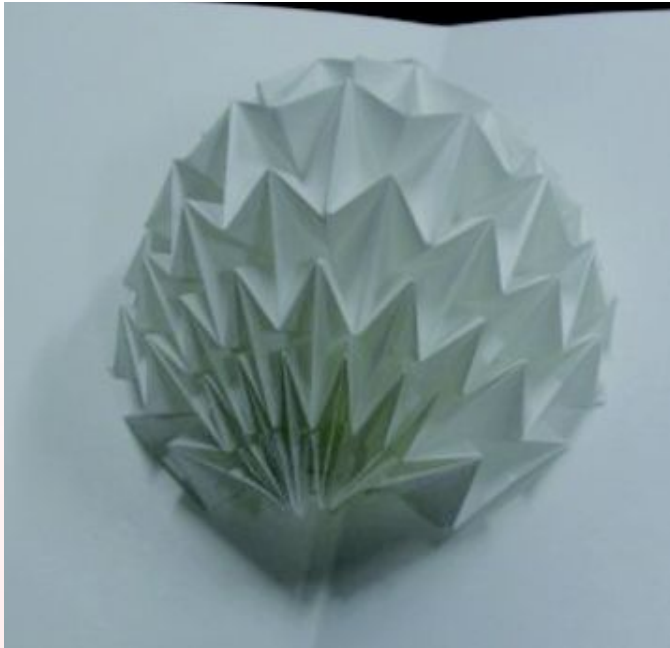
2面固定(117度)



1面固定(180度)

# 曲面のポップアップ模型

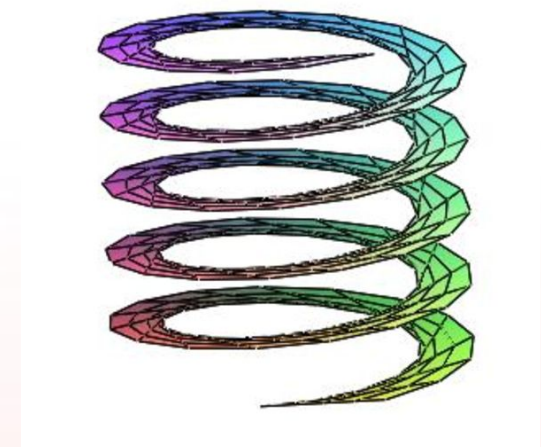
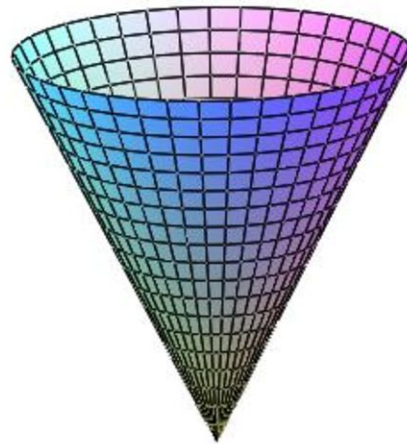
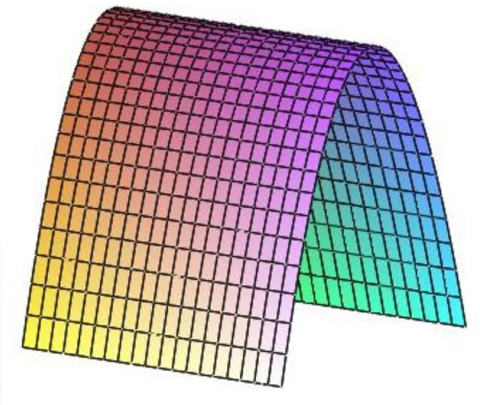
- 可展面の模型
- 折り紙
- 曲面体の断面模型
- ハニカムシートで回転体





# 可展面

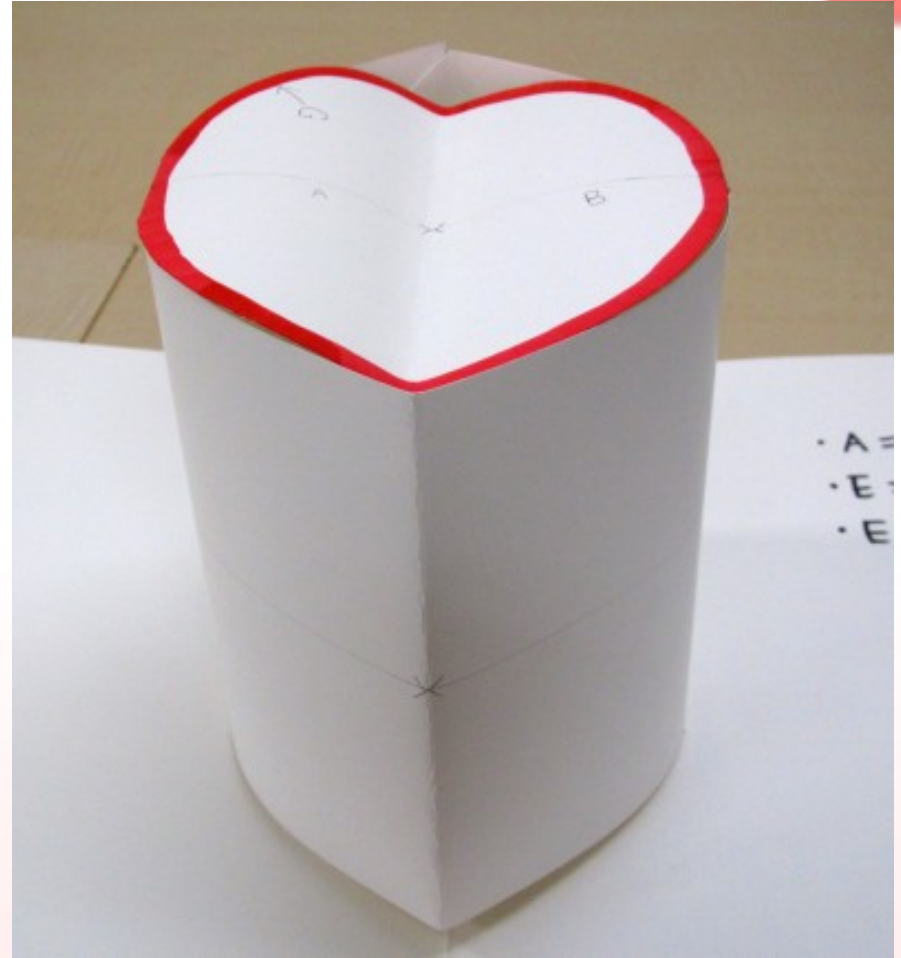
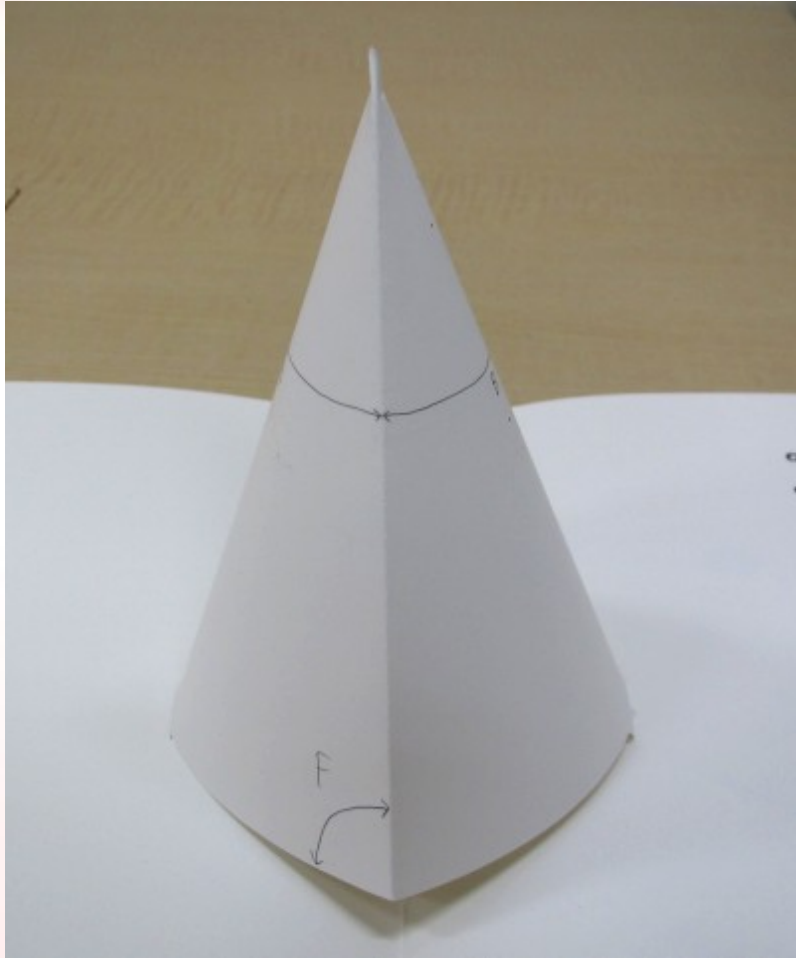
伸縮することなしに，平面に展開できる曲面。曲線の柱面，錐面，接線曲面に限る



可展面であれば、曲面を紙で表現できる。

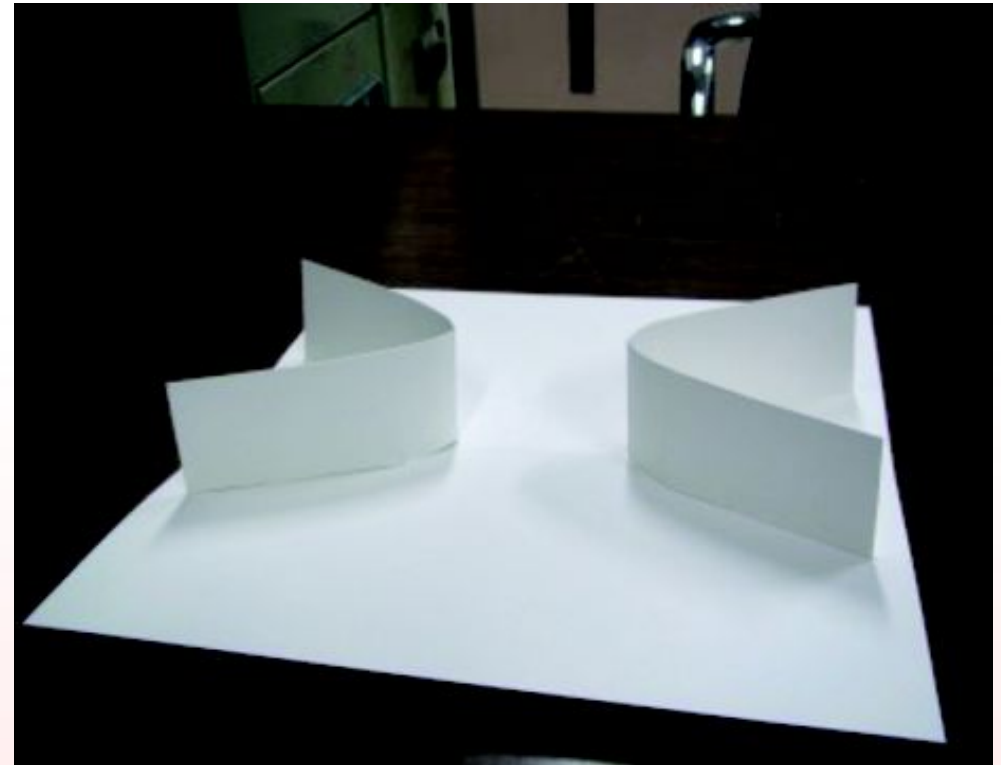
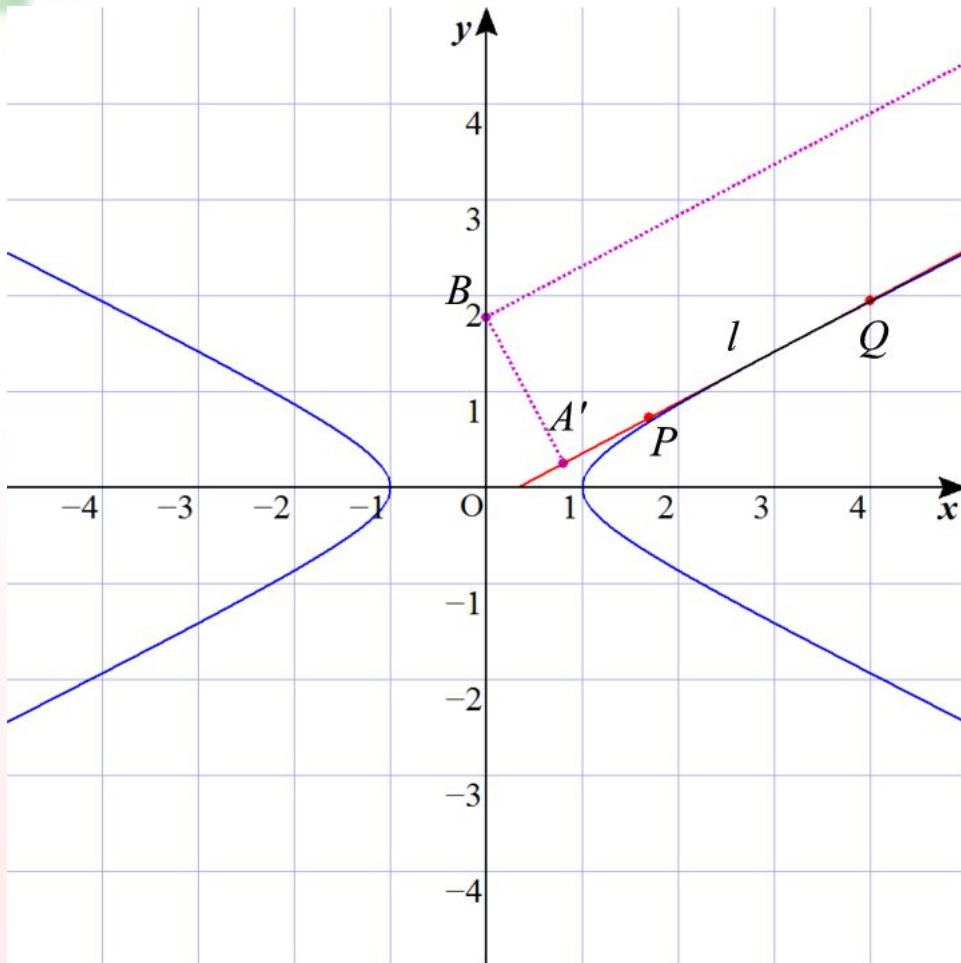


# 円錐と円柱



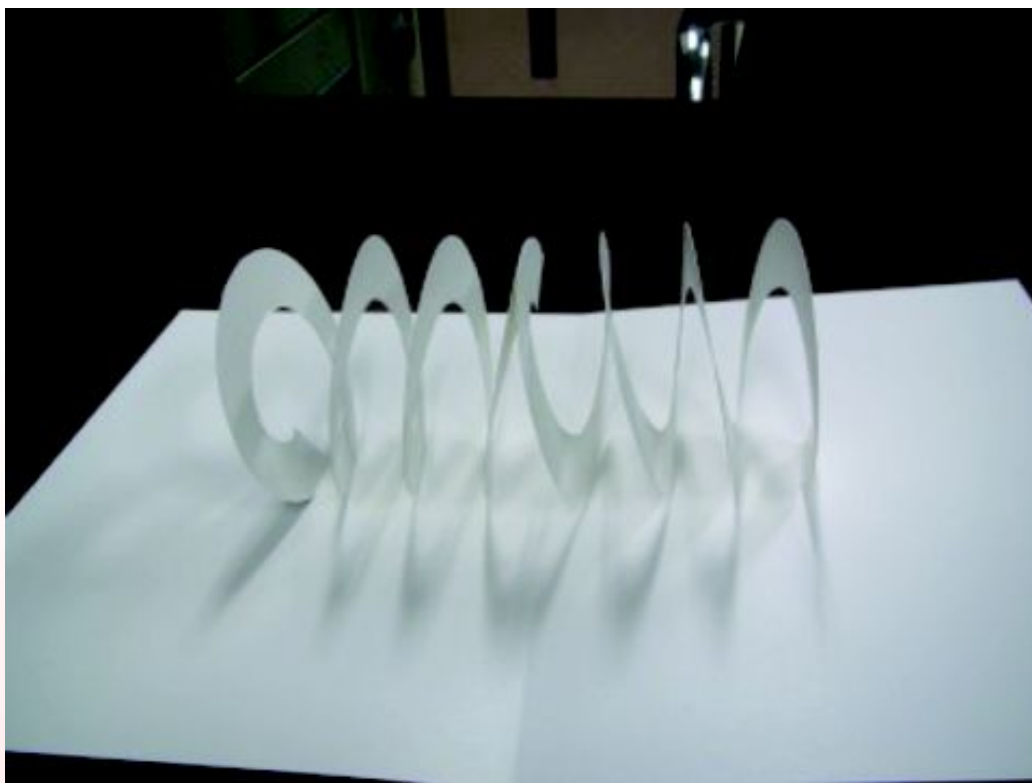
(参考) 実物で学ぶ仕掛け絵本の基礎知識 ポップアップ

# 双曲线柱面



# 接線曲面

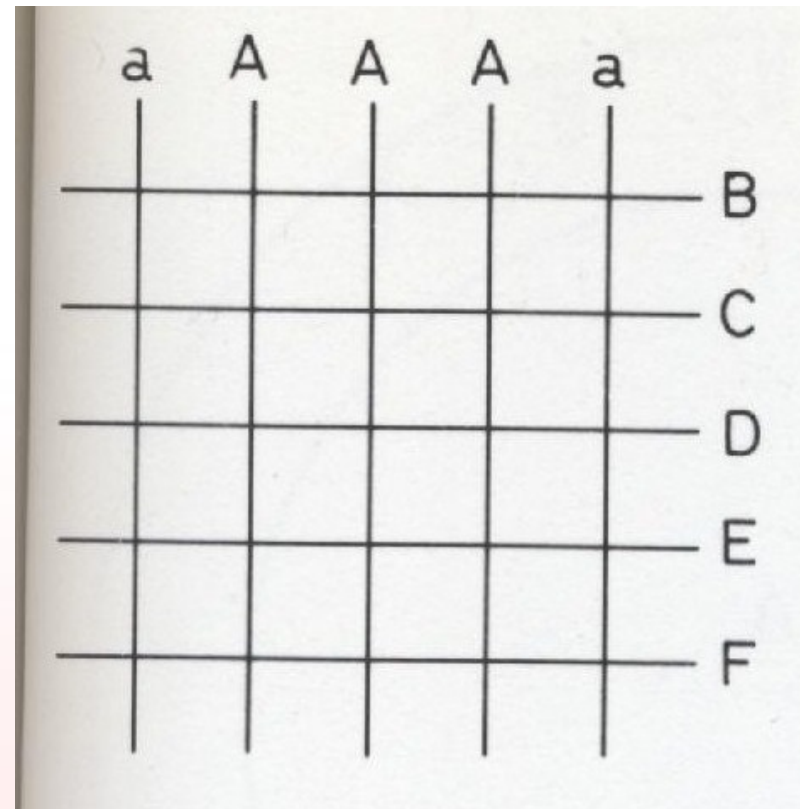
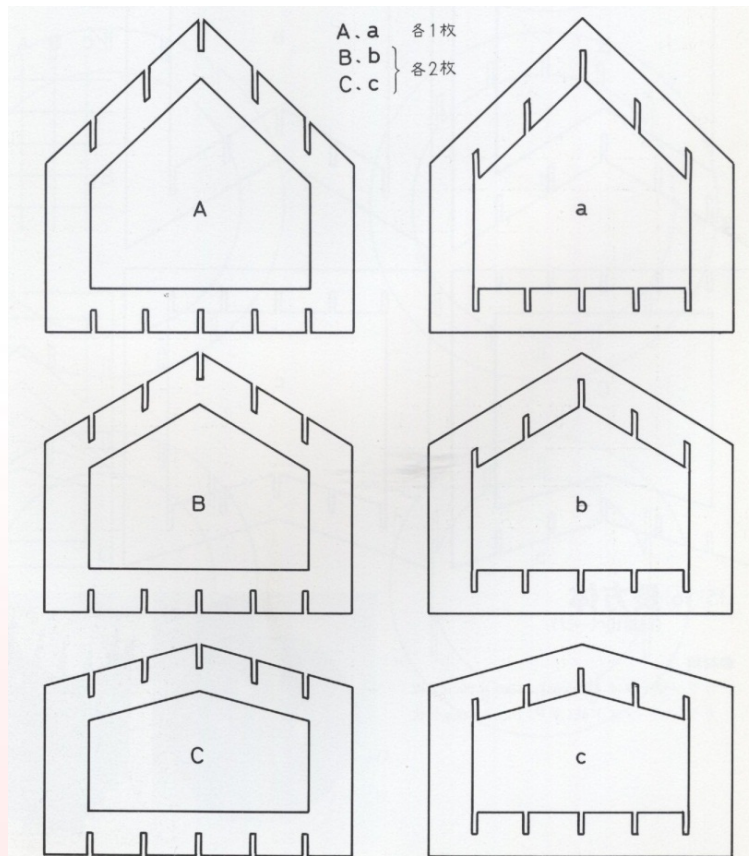
常螺旋 $r(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ の接線曲線



(参考) 実物で学ぶ仕掛け絵本の基礎知識 ポップアップ

# 格子

曲面体の断面模型は、紙に切り込みを入れ格子状に組み合わせることで表現する。

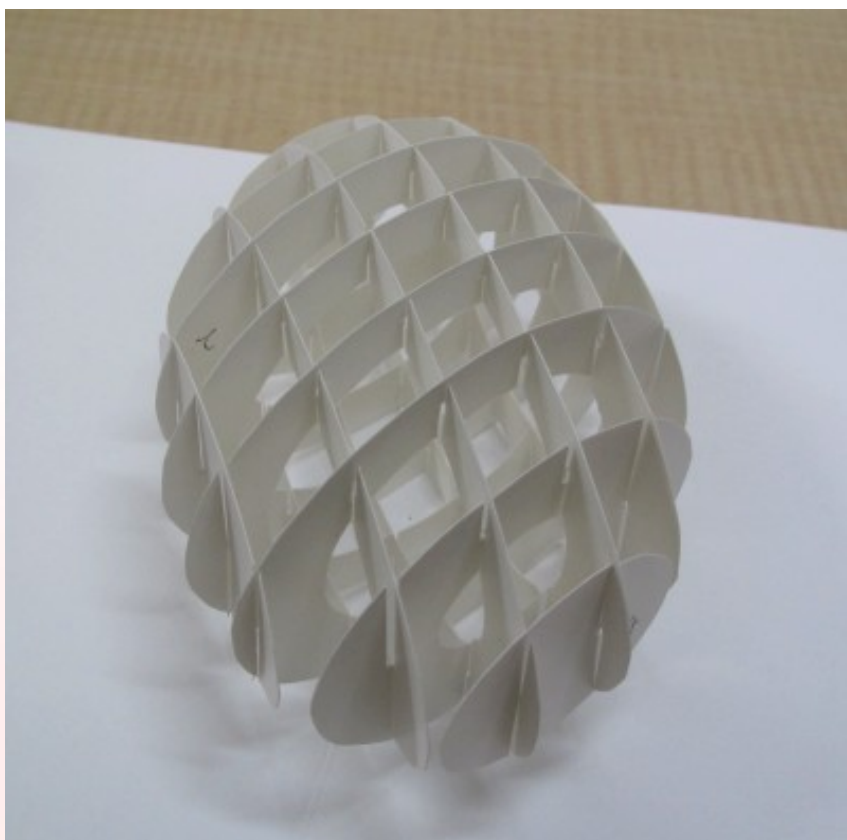


(参考) 飛び出すペーパークラフト7 マジックハウス



# 曲面の断面模型

- 楕円面  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$



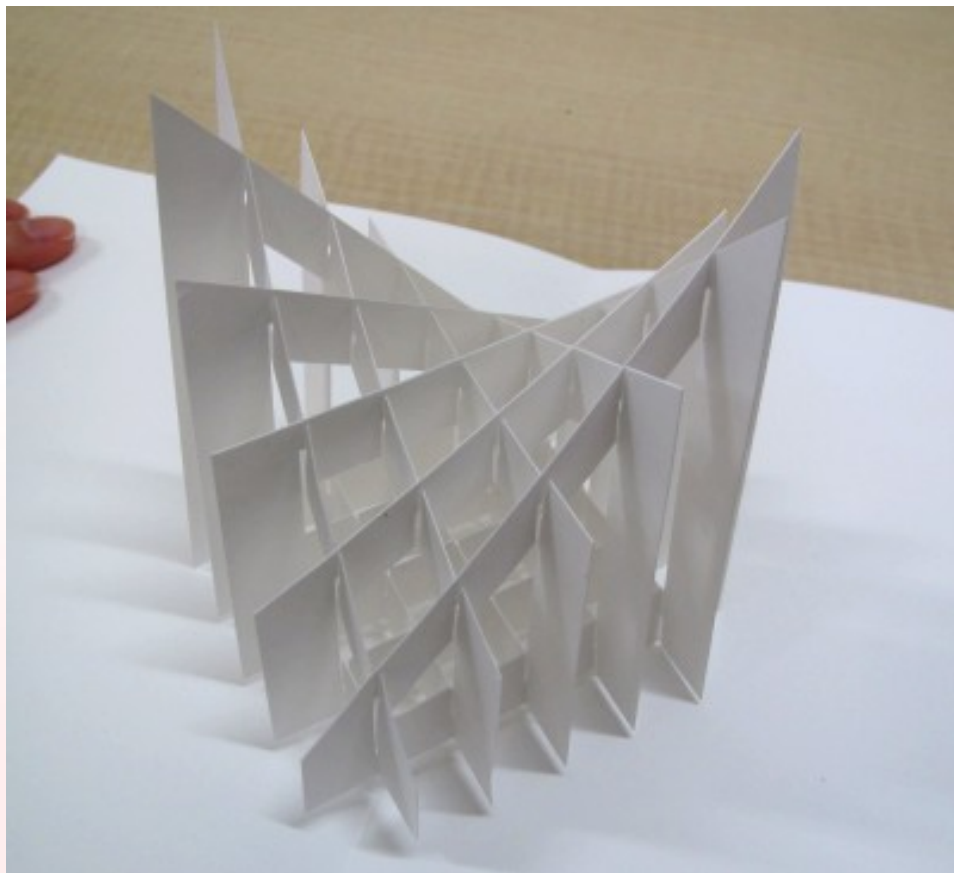
- 一葉双曲面  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$



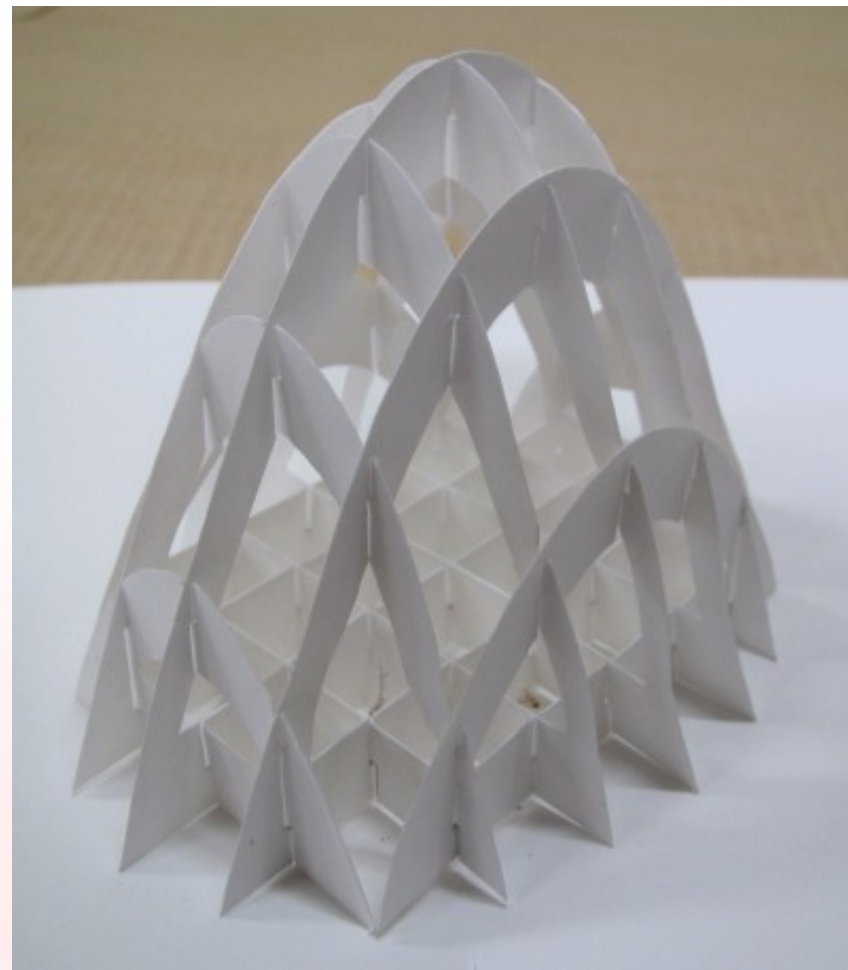


# 二次曲面

- 双曲放物面  $Z = axy$



- 楕円放物面  $Z = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$



# 参考文献

- デビッドA. カーター, ジェームズダイムズ, 実物で学ぶ仕掛け絵本の基礎知識 ポップアップ, 大日本絵図, 2002
- 茶谷正洋, 中沢圭子, 飛び出すペーパークラフト7 マジックハウス, 雄鶏社, 1994
- Scott Johnson, Hans Walser, Pop-up polyhedra, The Mathematical Gazette 81(492) 1997, pp.364-380
- David Cassell, Pop-up polyhedra, Mathematics in School 17(1988), pp.24-27
- 佐久間菜摘, 梶原有紀, 吉野隆, 正多面体のポップアップブックの作成, 形の科学会誌23(2008), pp.236-237.
- 西三数学サークル, 見える数学2 見て, 作って, なるほど数学, 星の環社, 2011
- ポール・ジャクソン, デザイナーのための折りのテクニック平面から立体へ, 文化出版局, 2012
- 西村保三, 南京佑奈, 多面体のポップアップ模型, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌23 (2017), pp.49-60.



ご清聴ありがとうございました。