屈折の法則　”スネルの法則”　から最速下降曲線”brachistos　chronos”　へ

ヨハン・ベルヌーイの発想

問題　**物体**が**重力**の**下**で（**他**の**力**は**働**かない）**一定距離落下**するときに、
どのような**曲線**に**沿**って**落下**したときに、**最短時間**となるか？
という問題を解くのに、スネルの法則をもとに考えた。
これは屈折の法則とも呼ばれる。

$$\frac{v_A}{\sin\theta_A} = \frac{v_B}{\sin\theta_B}$$

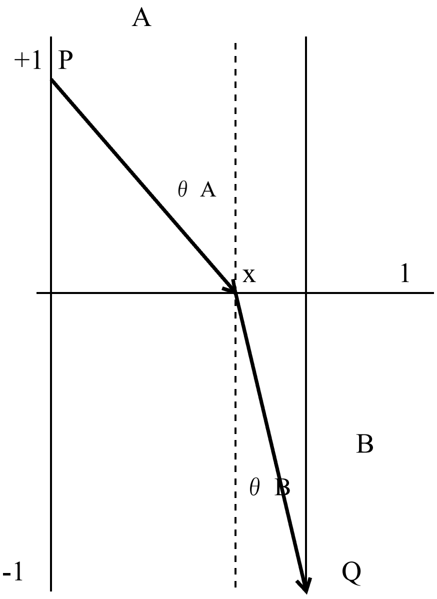
スネルの法則

この法則は光が経過時間が最小になる経路を通るという原理を認めると、
数学Ⅲの微分を用いた極小問題として示すことができる。

設定　x 軸を境界として上側が媒質 A　そこでの速度を v　A
下側を媒質 B、そこでの速度を v B とする。
媒質 A から媒質 B への入射角を θ A
媒質 B から媒質への入射角を θ B　とする
P(0,1) から境界を通過する点 X までの距離を PX
X から Q(0,-1) までの距離を QX とすると
P から Q への到達時間は

$$\frac{PX}{V_A} + \frac{QX}{V_B}$$

で表され、この時間が最小になるような経路が
実際に光が通る経路である。



三平方の定理から

$PX=\sqrt{1+x^2}$, $QX=\sqrt{1+(1-x)^2}$　であるから

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{V_A} + \frac{\sqrt{1+(1-x)^2}}{V_B}$$

を微分して、それが 0 となる x の値が　経路を与えるものである。
数学Ⅲでの無理関数の微分法、合成関数の微分法を用いると

$$\frac{x}{V_A\sqrt{1+x^2}} - \frac{1-x}{V_B\sqrt{1+(1-x)^2}} = 0$$

ここで　図から

$$\sin\theta_A = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin\theta_B = \frac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}}$$

を用いると　$\frac{v_A}{\sin\theta_A} = \frac{v_B}{\sin\theta_B}$　とスネルの定理が導かれる。

ベルヌーイは、このスネルの法則を用いて、物体が重力の下で（他の力は働かない）、
一定距離落下するときに、どのような曲線(この曲線が最速降下曲線)に沿って
落下したときに、最短時間となるか?　という問題を解くのに、次のように考えた。
スネルの法則は、異なった媒質 A から媒質 B へ光が伝わるとき
A と B では光が移動する速度が異なるので、その到達時間が最短になるように、
境界面で屈折することを表している。その式は、屈折角と速度が比例すると解釈できる。
上の落下の問題では、媒質は変化しないが、重力により速度は刻々変化している。
従って、刻々変化する速度に比例して、屈折角も変化すると考えたのである。
重力によって速さが変化することを、速さが大きくなるような無限に薄い媒質の
無限に重なった層を通過するとも考えられる。

これを式で表すために　座標軸を右のように
　y 軸を下向きに設定する。
軌跡の方程式を y=f(x) とすると
他に力の働かない重力の下での落下の法則より
落下距離に当たる y は

$y=\frac{1}{2}gt^2$　　と表され

速度　v=gt　は　と $v=\sqrt{2gy}$ ・・・① 表せる。

またスネルの法則から　速度が変化しても　角と速度の比が変わらないことから

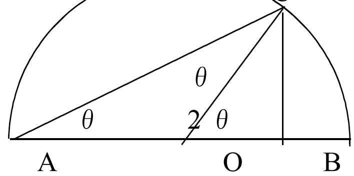
$\frac{v}{\sin\theta}=K$・・・② (k:定数) と置くことが出来る。

$\sin\theta$ は dx ,dy を二辺とする直角三角形を考えると $\sin\theta=\frac{dx}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}$ ・・・③

②へ①　③を代入し、両辺を二乗して　$k^2/2g=c$　とおき、dx=　の形に整理すると

$dx=\sqrt{\frac{y}{c-y}}\,dy$ ・・・④　の形になる。

右辺が y の式ではあるが　x と同様にみて　数学Ⅲの知識で積分できれば
最速下降曲線を求められたことになる。ここはたいていは天下りに　置換して
積分と書いてあるが、高校生のレベルでどう変形できればよいか推理してみる。
√があるので　ルートの中が（　　）^{2}　の形になればいいな　と考える。
ところが　文字式の変形だけでは難しい（どうみても平方完成できる形ではない
すなわち　二次式・二次関数ではだめ→多項式ではだめ）
特別な関数を使う必要がある。しかし、高校の範囲では特別と言っても
指数関数・対数関数・三角関数しか候補はない。
候補を絞っていっても　　指数関数・対数関数はできそうにない。
しかし、三角関数なら　倍角公式それを逆に見た半角公式で
ルートの中を　（　　）^{2}　の形に出来る可能性がありそう
ここで倍角公式を導き方から復習してみよう。
単位円の図を用いて、直感的に導こう
円では二等辺三角形がすぐ作れるし
それを見つけるのがポイント



単位円なので OA=1,OB=1 ,OC=1
△ AOC は二等辺三角形で　∠ OAC=∠ OCB　これを θ とおくと
∠ BOC=2 θ　よって　OB=cos2 θ　　CB=sin2 θ　　となるが
△ ABC　でみると　CB=ACsin θ　　AC は△ AOC が二等辺三角形なので
AC=2cos θ　　これで　CB=sin2 θ　でかつ　CB=ACsin θ =2cos θ sin θ

$\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$　　とサインの倍角公式が導けた。

さらに　△ ABC　で　AB=ACcos θ =2cos θ cos θ =2cos^2 θ
AB=AO+OB=1+cos2 θ　なので　2cos^2 θ =1+cos2 θ

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta -1$　　とコサインの倍角公式が導けた。

特に　高校でも　二乗が出てくるコサインの倍角公式が

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　を用いると

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\ 2\cos^2\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\ \cos^2\theta-\sin^2\theta$

$\cos 2\theta==\ \cos^2\theta+\sin^2\theta-\sin^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$

と三通りに変形でき、よく入試や模試にでて、生徒にはいやがられるが、
これからの変形で、役に立つことも印象づけられる。

ここで　$\sqrt{\dfrac{y}{c-y}}$　のyをどう三角関数で置き換えるか?　に戻ってみよう。

$\sqrt{}$ の中が　$\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$　か　$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$　のどちらかになればうまくいきそうである。

$\dfrac{y}{c-y}=\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$　とすると$y\sin^2\theta=c\cos^2\theta-y\cos^2\theta$　から　$y=c\cos^2\theta$　が変数変換の時

$dy=-2c\sin\theta\cos\theta$ とマイナスになり、具合が悪い

$\dfrac{y}{c-y}=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$　とすると$y\cos^2\theta=c\sin^2\theta-y\sin^2\theta$　から　$y=c\sin^2\theta$ とおくと

$dy=2c\sin\theta\cos\theta$ となり、$\displaystyle\int\sqrt{\frac{y}{c-y}}\,dy=\int\frac{\sin\theta}{\cos\theta}2c\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\int 2c\sin^2\theta\,d\theta$

ここで導いた　$\cos 2\theta==\ 1-2\sin^2\theta$　　$2\sin^2\theta=1-\cos 2\theta$　　を用いれば

$\displaystyle\int\sqrt{\frac{y}{c-y}}\,dy=\int 2c\sin^2\theta\,d\theta=\int c(1-\cos 2\theta)d\theta=c\theta-\frac{c\sin 2\theta}{2}+c_0=x$　となる(④のdx ，dyの関係式から)

$c_0=0$　とし　$y=c\sin^2\theta$　も 2θ であらわすと

$x=c\theta-\dfrac{c}{2}\sin 2\theta$　　$2\theta=t$ とおき　$\dfrac{c}{2}$ を改めてc とおくと

$y=\dfrac{c}{2}+\dfrac{c}{2}\cos 2\theta$　　$\begin{aligned}x&=c\theta-c\sin\theta\\ y&=c+c\cos\theta\end{aligned}$　とサイクロイドの教科書の形となる。

さらに $\sin\theta,\cos\theta$ を消去すると$(x-c\theta)^2+(y-c)^2=c^2$　と円との違いがはっきりする。

参考文献　「ベルヌーイ家の遺した数学」松原望

この本では 変数変換が　$y=(c/2)(1-\cos\theta)$ と少し天下り気味なので
一本道ではないが、生徒でも思いつけるよう工夫してみました。