(予想) 長岡技術科学大学の中川先生より

研究上の必要性から
数値計算から、そうなるように思える。

> $\rho > 0$ のとき、
> 漸化式 $a_{n+1} = a_n - \rho a_n^2$ と $a_0 = \dfrac{1}{2\rho}$
> で決まる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ について、
> $$\lim_{n\to\infty} n a_n = \frac{1}{\rho}$$

つまり。。。

> a_n が 0 に収束するスピードが、1/n のオーダーである

ということ。この予想を証明したい。とりあえず、等価な次の命題を考える。

> 漸化式 $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ と $a_0 = 1/2$
> で決まる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ について、
> $$\lim_{n\to\infty} n a_n = 1$$

○ $a_n \to 0$ は、容易に示せる。

($0 < a_{n+1} < a_n$ より収束し, 極限値が $a = a - a^2$ を満たす。)

○ $a_n < \dfrac{1}{n}$ も、容易に示せる。

($b_n = 1 - n a_n$ とおくと、漸化式より

$$b_{n+1} = \frac{1}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right) b_n + \frac{n+1}{n^2} {b_n}^2$$

が成り立ち、帰納的に $b_n > 0$ が証明できる。)

従って、あとは。。。

$$\square < a_n \ , \ \square \sim \frac{1}{n}$$

を満たす数列□を、見つければよい！

($n \times \square < n a_n < 1$ が成り立つので、はさみうちの原理より $n a_n \to 1$ が示せる。)

$\dfrac{1}{n+1}$ や $\dfrac{1}{n+2}$ などは、うまくいかない。

そこで。。。

$\dfrac{1}{n + (\text{定数}) \times \sqrt{n}}$ の形を思いつき、次の証明を試みた。つまり。。。

$f(x) = x - x^2$ としたとき、

$a_{n+1} = f(a_n)$, $a_0 = 1/2$

で決まる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ について、

$$\frac{1}{n+1+2\sqrt{n+1}} < a_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \quad \cdots \text{A}$$

を示す。(Aが成り立てば、すでに示された $n a_n < 1$ と合わせて

$$\frac{n}{n+1+2\sqrt{n+1}} < n a_n < 1$$ が成り立ち, $n a_n \to 1$ が示される！)

Aを、帰納法で証明する。

(Ⅰ) $\dfrac{1}{1+2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} = a_0$ より、$n = 0$ のときA が成り立つ。

(Ⅱ) 自然数 n ($n = 1, 2, \cdots$) について

$$\frac{1}{n+2\sqrt{n}} < a_{n-1}$$

が成り立つことを仮定したとき

$$\frac{1}{n+1+2\sqrt{n+1}} < a_n \cdots ①$$

が成り立つことを示す。そのために、①を同値変形した

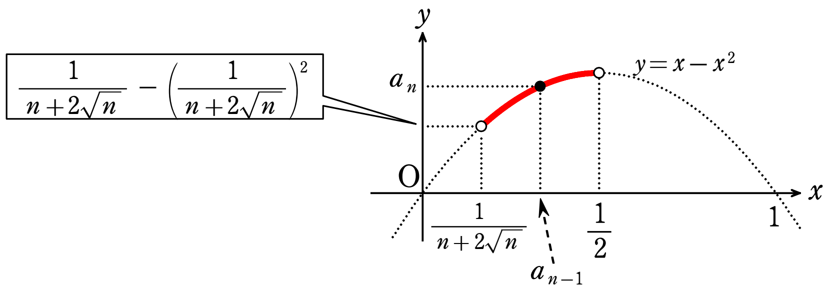
$$(n+1+2\sqrt{n+1})a_n - 1 > 0 \cdots ②$$

を示す。左辺を計算すると、漸化式 $a_n = a_{n-1} - {a_{n-1}}^2$ より

$$(n+1+2\sqrt{n+1})a_n - 1 = (n+1+2\sqrt{n+1})(a_{n-1} - {a_{n-1}}^2) - 1 \cdots ③$$

一方、既に示されたことと仮定より $\dfrac{1}{n+2\sqrt{n}} < a_{n-1} \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立ち、

さらに関数 $y=x-x^2$ は $\dfrac{1}{n+2\sqrt{n}} < x \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲で増加であるので



③は次のように下から抑えられる；

$$③ > (n+1+2\sqrt{n+1})\left\{\frac{1}{n+2\sqrt{n}} - \left(\frac{1}{n+2\sqrt{n}}\right)^2\right\} - 1$$

右辺をさらに変形すると

$$= \frac{1}{(n+2\sqrt{n})^2}\{(n+1+2\sqrt{n+1})(n+2\sqrt{n}-1)-(n+2\sqrt{n})^2\}$$

ここで、関数

$$\boxed{f(x) = (x+1+2\sqrt{x+1})(x+2\sqrt{x}-1)-(x+2\sqrt{x})^2}$$

を定義し、

$x \geqq 1$ のとき $f(x)>0$ …④

を示す。(④ を示せば、任意の 自然数 n について $③ = \dfrac{1}{(n+2\sqrt{n})^2} \times f(n) > 0$

となって②および①が成り立つので、(Ⅰ)と(Ⅱ)より、証明がおわる)

$f(x)$を次のように変形する。

まず、第１項の始めのかっこの中身で２つにわける。

$$f(x) = (x+1)(x+2\sqrt{x}-1) + 2\sqrt{x+1}(x+2\sqrt{x}-1) - (x+2\sqrt{x})^2$$

第１項と第３項を展開する。

$$= x^2 + 2x\sqrt{x} - x + x + 2\sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x+1}(x+2\sqrt{x}-1)$$
$$-(x^2+4x\sqrt{x}+4x)$$

整理すると

$$= -2x\sqrt{x} - 4x + 2\sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x+1}(x+2\sqrt{x}-1)$$

さらに$\pm 2\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}-1)$を加える。

$$= -2x\sqrt{x} - 4x + 2\sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x+1}(x+2\sqrt{x}-1)$$
$$-2\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}-1)+2\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}-1)$$

最後の項を展開して

$$= -2x\sqrt{x} - 4x + 2\sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x+1}(x+2\sqrt{x}-1)$$
$$-2\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}-1)+2x\sqrt{x}+4x-2\sqrt{x}$$

整理すると

$$= -1 + 2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(x+2\sqrt{x}-1) \cdots ⑤$$

(④の証明１)

$$\boxed{\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leftarrow 減少}$$

⑤を微分すると、

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x+2\sqrt{x}-1) + 2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x+2\sqrt{x}-1) + 2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+1)x}}(x+2\sqrt{x}-1) + 2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\left\{-\frac{x+2\sqrt{x}-1}{\sqrt{(x+1)x}} + 2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\}$$

$$= (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \times \frac{-x-2\sqrt{x}+1+2\sqrt{(x+1)x}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+1)x}}$$

$$= (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \times \frac{2\sqrt{x^2+x} - x + 2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) + 1}{\sqrt{(x+1)x}}$$

となり、これは $x>0$ のとき正であるので $f(x)$ は 単調増加となり、

一方で　$f(1) = 4\sqrt{2} - 5 = \sqrt{32} - \sqrt{25} > 0$ なので、④が成り立つ。(終わり)

解説

←式だけでは、増減がわからない。

TI→関数 $y=f(x)$ のグラフと導関数

④の不等式を、別の方法で証明できないか？

⑤も式だけでは増減はわからない。

④＝⑤をグラフ機能で確かめる。

(④の証明２)

⑤をさらに変形すると、

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=-1+\frac{2(x+2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-\sqrt{x+1}-\sqrt{x}+2x+4\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-\sqrt{x+1}+2x+3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \cdots ⑥$$

ここで、分子を $g(x)=-\sqrt{x+1}+2x+3\sqrt{x}-2$ とおくと、

$$g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+2+\frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)+2$$

となり、これは $x>0$ で正であるので $g(x)$ は単調増加となり、一方で、

$$g(1)=-\sqrt{2}+2+3-2=3-\sqrt{2}>0$$

なので、

$x \geqq 1$ のとき $g(x)>0$

が成り立つ。よって、$x \geqq 1$ のとき

$$f(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}>0$$

が成り立つ。(終わり)

(④の証明３)

$$g(x)=-\sqrt{x+1}+2x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2$$

$$=(2x+2\sqrt{x})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-2$$

$$=(2x+2\sqrt{x})-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-2$$

よって、$x>0$ のとき、$g(x)$ は単調増加であり、一方で

$$g(1)=3-\sqrt{2}>0$$

なので、$x \geqq 1$ のとき $g(x)>0$ が成り立つ。(終わり)

結局。。。

$$f(x)=(x+1+2\sqrt{x+1})(x+2\sqrt{x}-1)-(x+2\sqrt{x})^2$$

$$=\frac{2x+2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$ と変形すれば、微分を使わずにすむ！

このように。。。

グラフ電卓をいろいろな形で用いながら、証明を進めることができた！

ちなみに。。。局所的な性質として、次のように一般化できる。

> 関数 $F(x)$ が
>
> $$F(x)=x-\rho x^2+o(x^2)\ (\rho>0)$$
>
> の形のとき(ここで $o(x^\alpha)$ は, $\lim_{x\to 0}\frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha}=0$ を満たす関数を表す)、
>
> $$a_{n+1}=F(a_n)$$
>
> で決まる数列 $\{a_n\}$ について、$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ が成り立つならば
>
> $$\lim_{n\to\infty} n a_n=\frac{1}{\rho}$$

さらに、次のように一般化できる。

> $$F(x)=x-\rho x^{l+1}+o(x^{l+1})\ (\rho>0,\ l\in\mathbb{N})$$
>
> の形のとき、
>
> $$a_{n+1}=F(a_n)$$
>
> で決まる数列 $\{a_n\}$ について、$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ が成り立つならば
>
> $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[l]{n}\, a_n=\frac{1}{\sqrt[l]{l\rho}}$$