

# 正弦定理と光の屈折の法則 数理モデルのひな型として

岡山自主夜間中学 河合伸昭

- 光の屈折の法則をホイヘンスは素元波という、波紋をイメージするモデルで説明した。  
現代では、光には様々な側面があり、そのように単純に扱えるものではないことが知られているが、このモデルから屈折の法則(式は**正弦定理と相似形**)が導かれる。  
数理モデルもというものも、対象とする実体のすべての振る舞いを説明できるものは、まず存在しない。  
が、実際の応用について、注目した現象がある程度説明できればと考えれば、アイデアも出やすくなるかもしれない。  
さらに、この素朴な考えが最速下降曲線の導出へつながっていく。

# 光の屈折の法則(スネルの法則)

- 媒質Aにおける波の速度を  $v_A$ 、媒質Bにおける波の速度を  $v_B$   
媒質Aから媒質Bへの入射角（またはBからAへの屈折角）を  $\theta_A$ 、  
媒質Bから媒質Aへの入射角（またはAからBへの屈折角）を  $\theta_B$   
とすると、以下の関係が成立する。

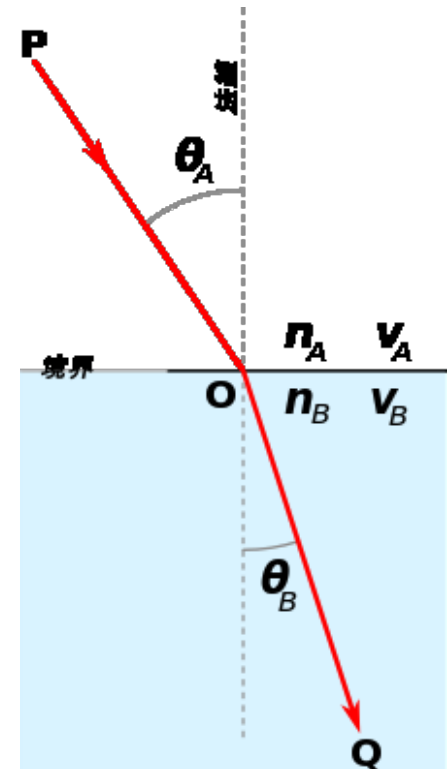
$$\frac{\sin \theta_A}{\sin \theta_B} = \frac{v_A}{v_B}$$

ここで、 $\frac{v_A}{v_B}$  の値を媒質Aに対する媒質Bの相対屈折率と定義し、

これを  $n_{AB}$  または  $n_{A \rightarrow B}$  で表す。

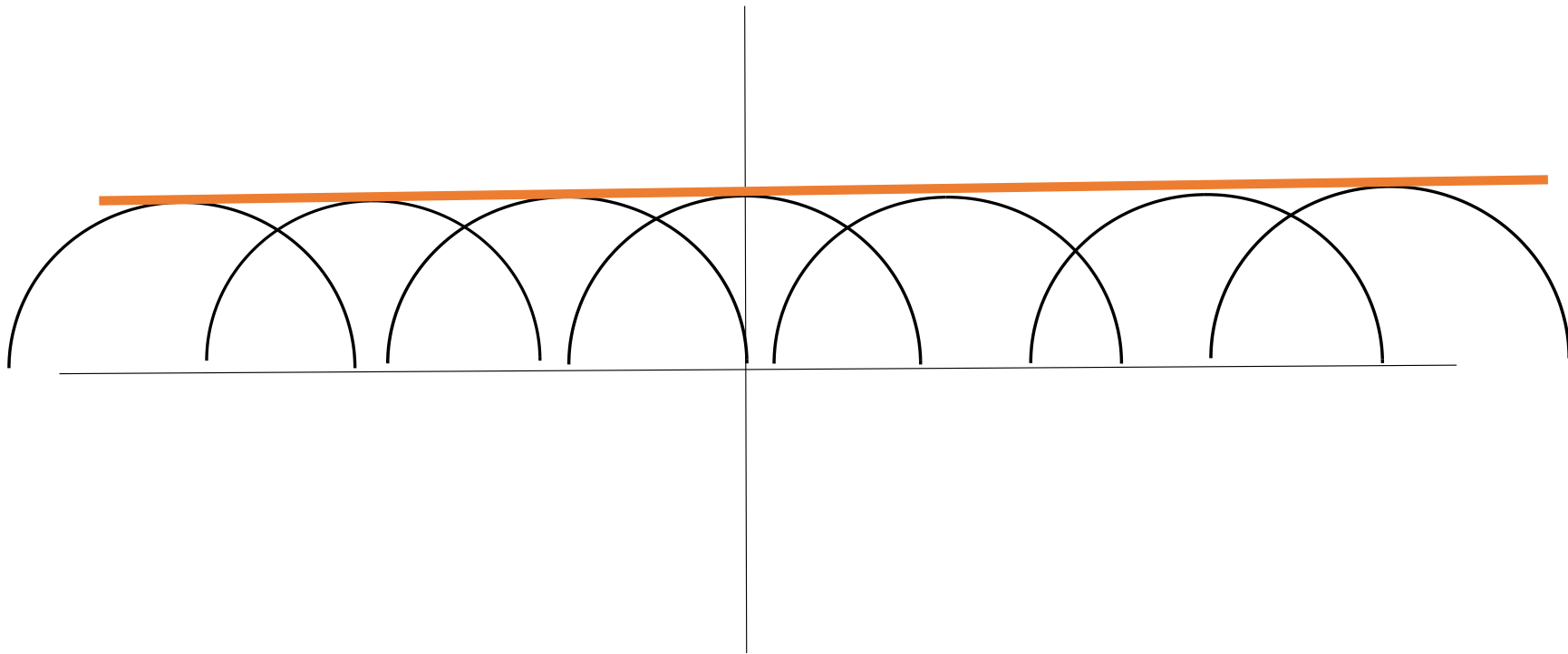
まとめると

$$\frac{\sin \theta_A}{\sin \theta_B} = \frac{v_A}{v_B} = n_{AB}$$



光のホイヘンスの素元波説  
光は光源から同心円（球）状に広がる

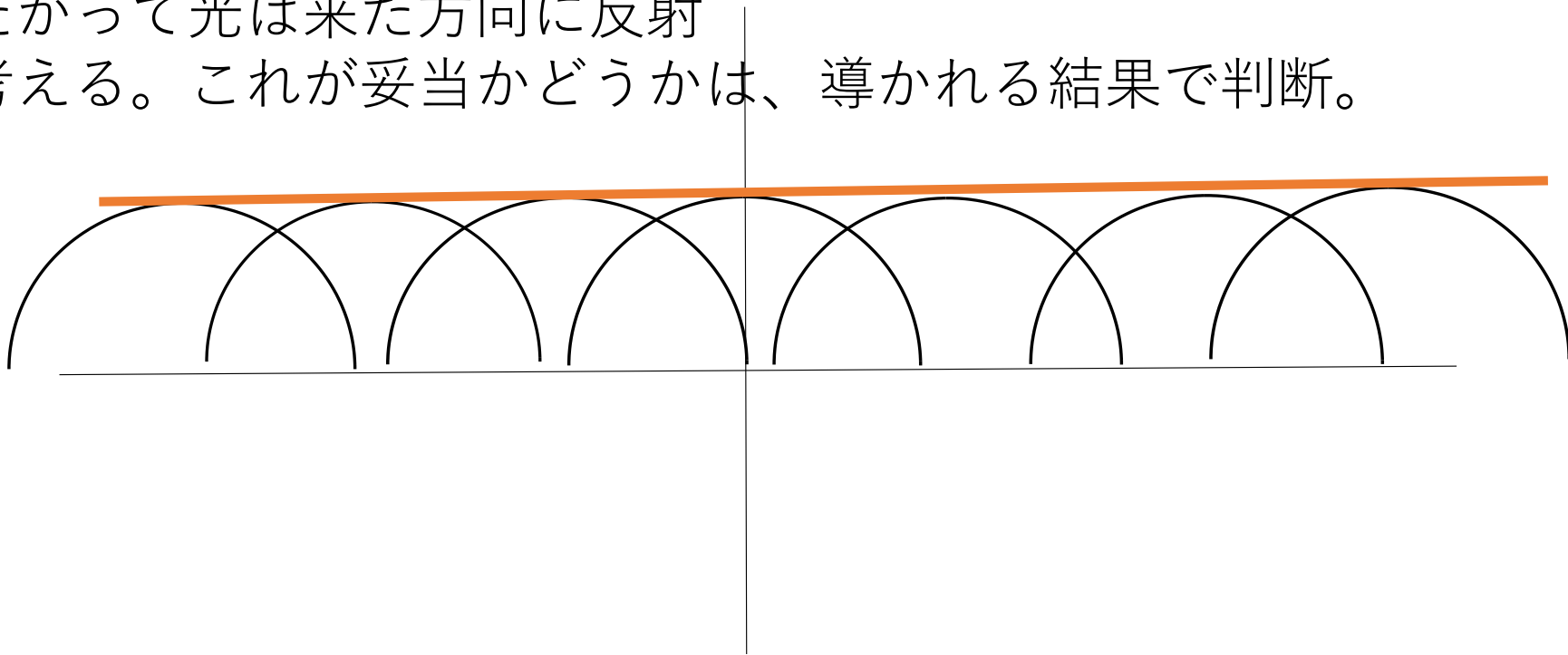
同心円の共通接線が波面の先端



光のホイヘンスの素元波説で説明

## 反射Ⅰ 境界面に垂直に差し込む場合

光が反射面に垂直に差し込むと境界(反射面)に達した点から同心円状に素元波が広がる。すると共通接線は反射面に平行したがって光は来た方向に反射と考える。これが妥当かどうかは、導かれる結果で判断。



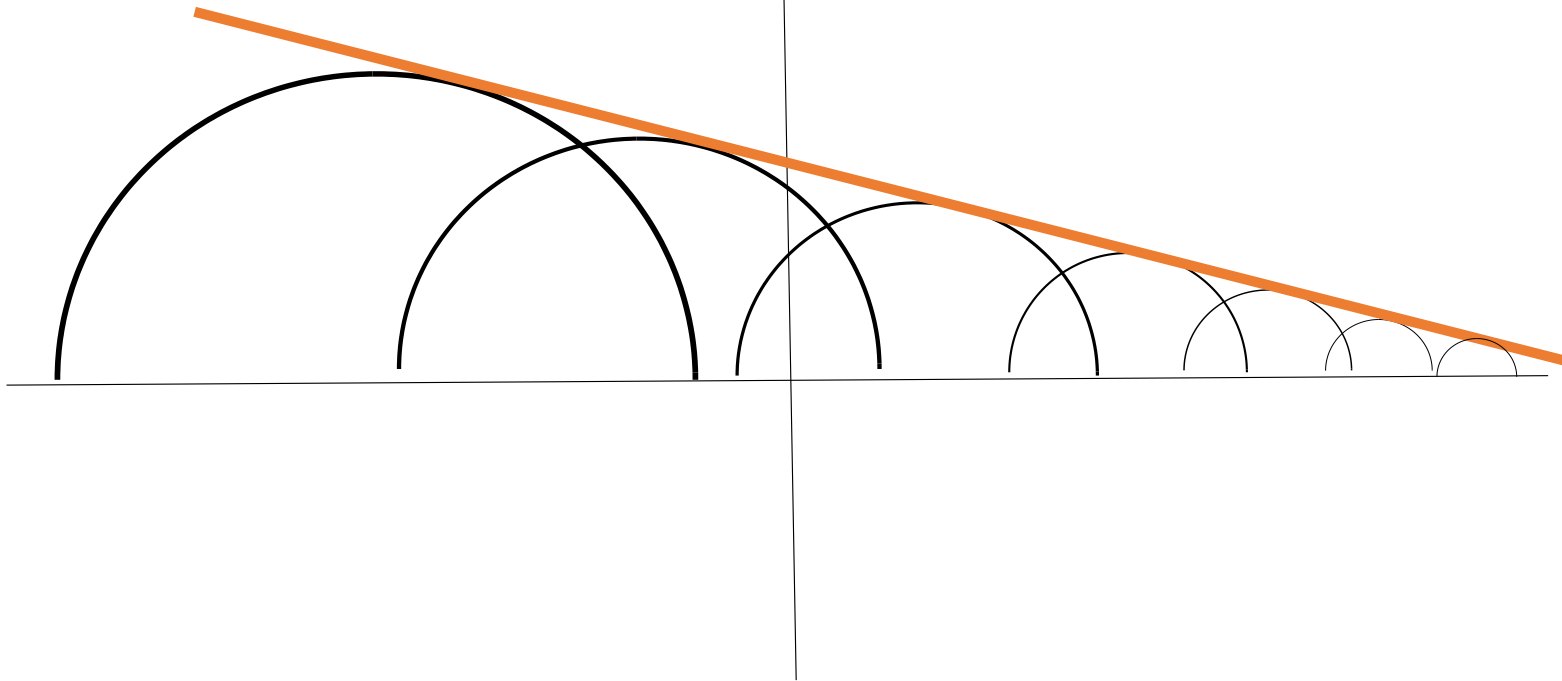
光のホイヘンスの素元波説による反射・屈折の説明

## 反射Ⅱ 斜めに差し込む場合

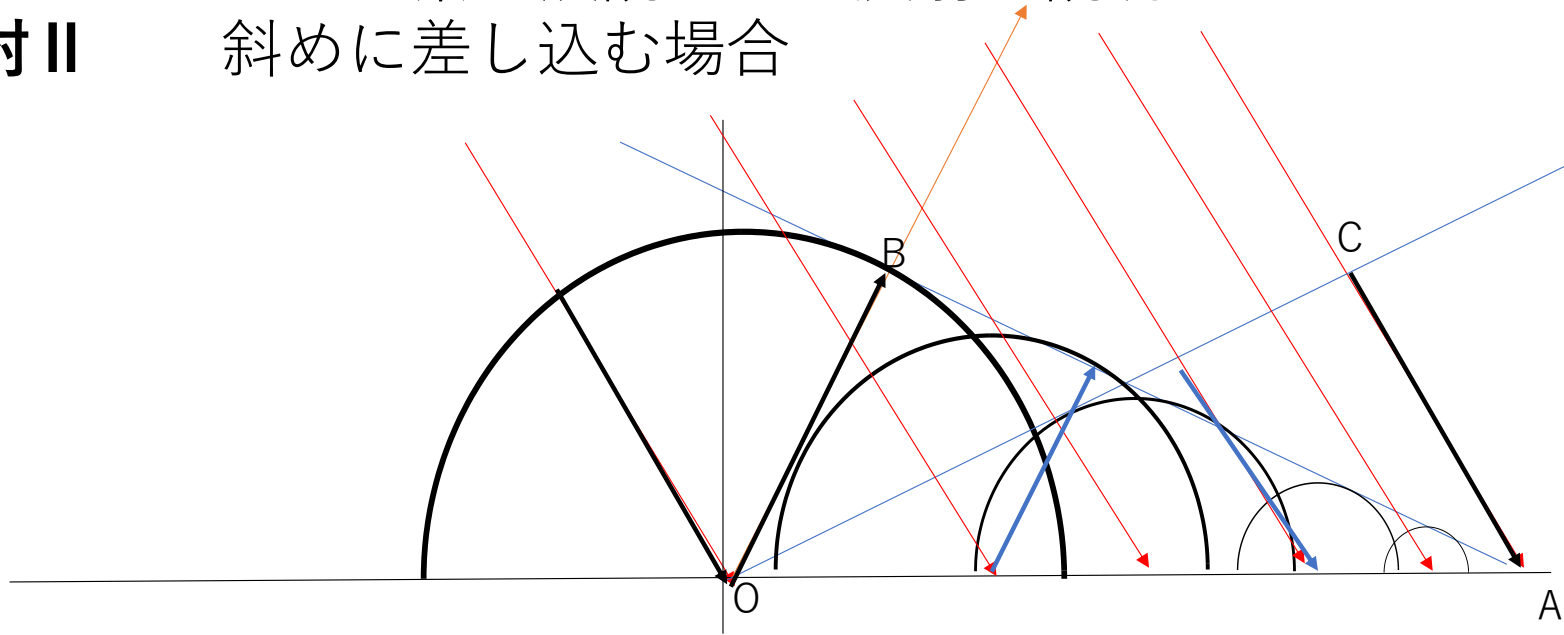
反射面に斜めに差し込むと 光路差が発生

光路差分 波紋（円）の大きさが違う

すべての円の共通接線を引くと それが波面



光のホイヘンスの素元波説による反射の説明  
反射Ⅱ 斜めに差し込む場合



反射面に斜めに差し込むと 光路差が発生

Oに差し込んだ光とAに差し込んだ光の光路差はCA

Aに差し込んだ光はに光が差し込んだ時点で $OB=CA$ となる点Bに到達半  
径分の光路差がある点Aと点Bを結ぶと それが波面となる。

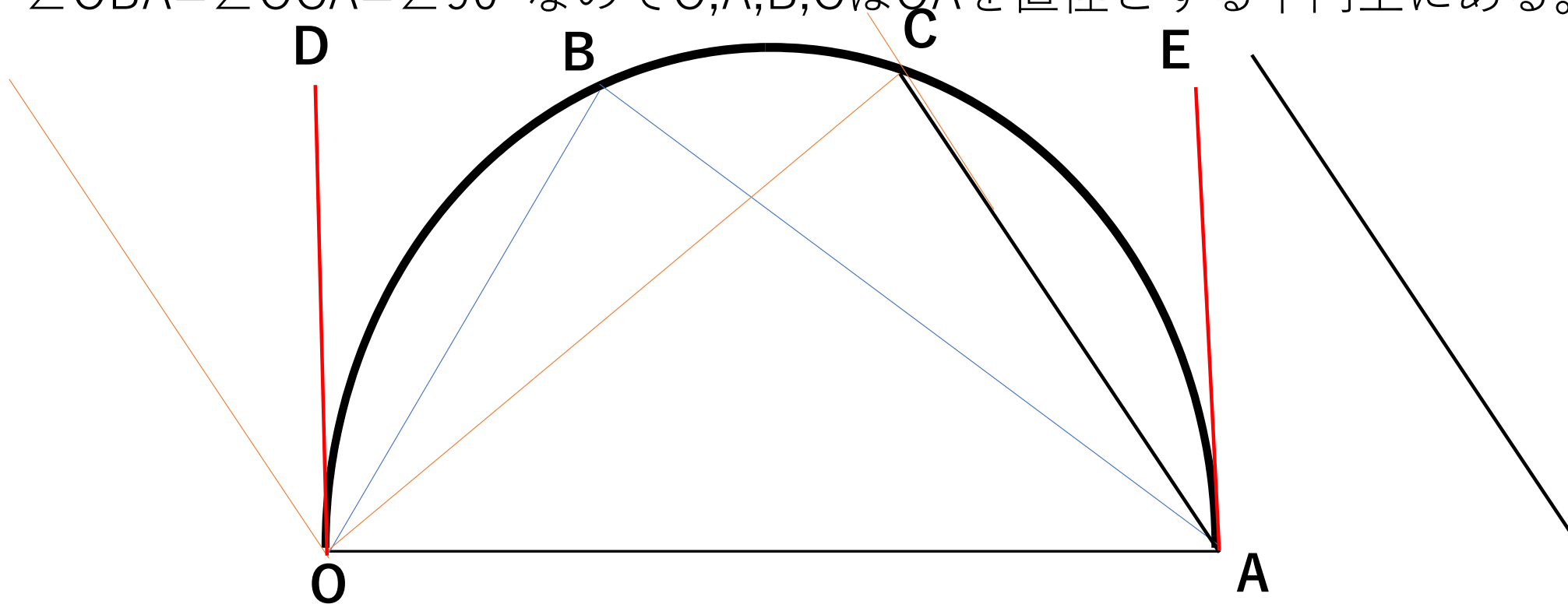
# 反射の法則 I 円が書けることから $\angle ABC = \angle DEF$

Oに差し込む光とAに差し込む光の光路差はAC

共通接線ABが波面、共通接線だから $OB \perp AB$

一方、光路差を求めるためにOCはCAに垂直に引いているから $OC \perp CA$ 。

$\angle OBA = \angle OCA = \angle 90^\circ$  なのでO,A,B,CはOAを直径とする半円上にある。

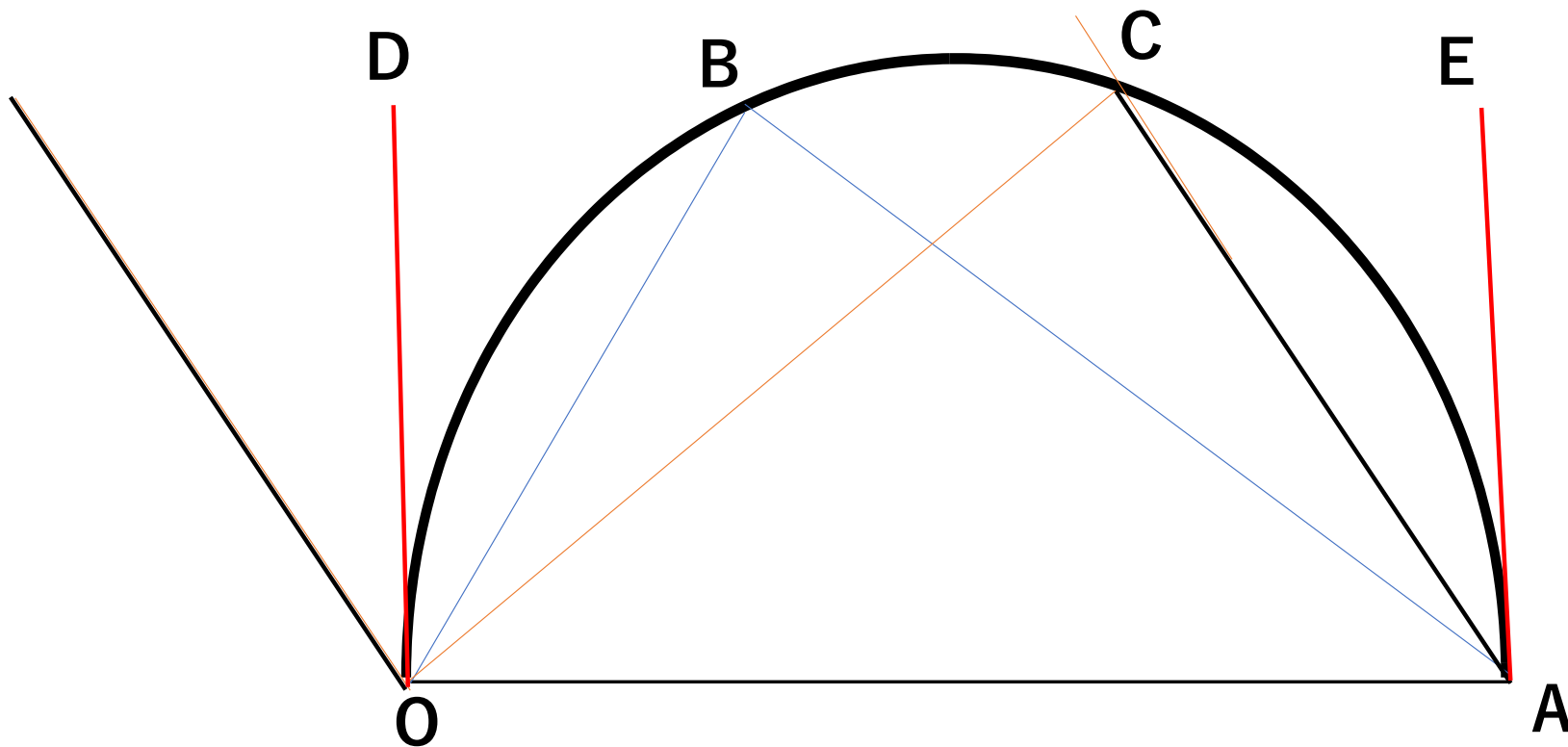


## 反射の法則 II 円が書けることから $\angle ABC = \angle DEF$

$\angle OBA = \angle OCA = \angle 90^\circ$  なので  $O, A, B, C$  は  $OA$  を直径とする半円上にある。

さらに  $OB = AC$  から  $\triangle OBA \cong \triangle ACO$  より  $\angle BOA = \angle CAO$

$DO, EA$  は、垂線なのでそれぞれ  $90^\circ$  からひいて  $\angle DOB = \angle EAC$



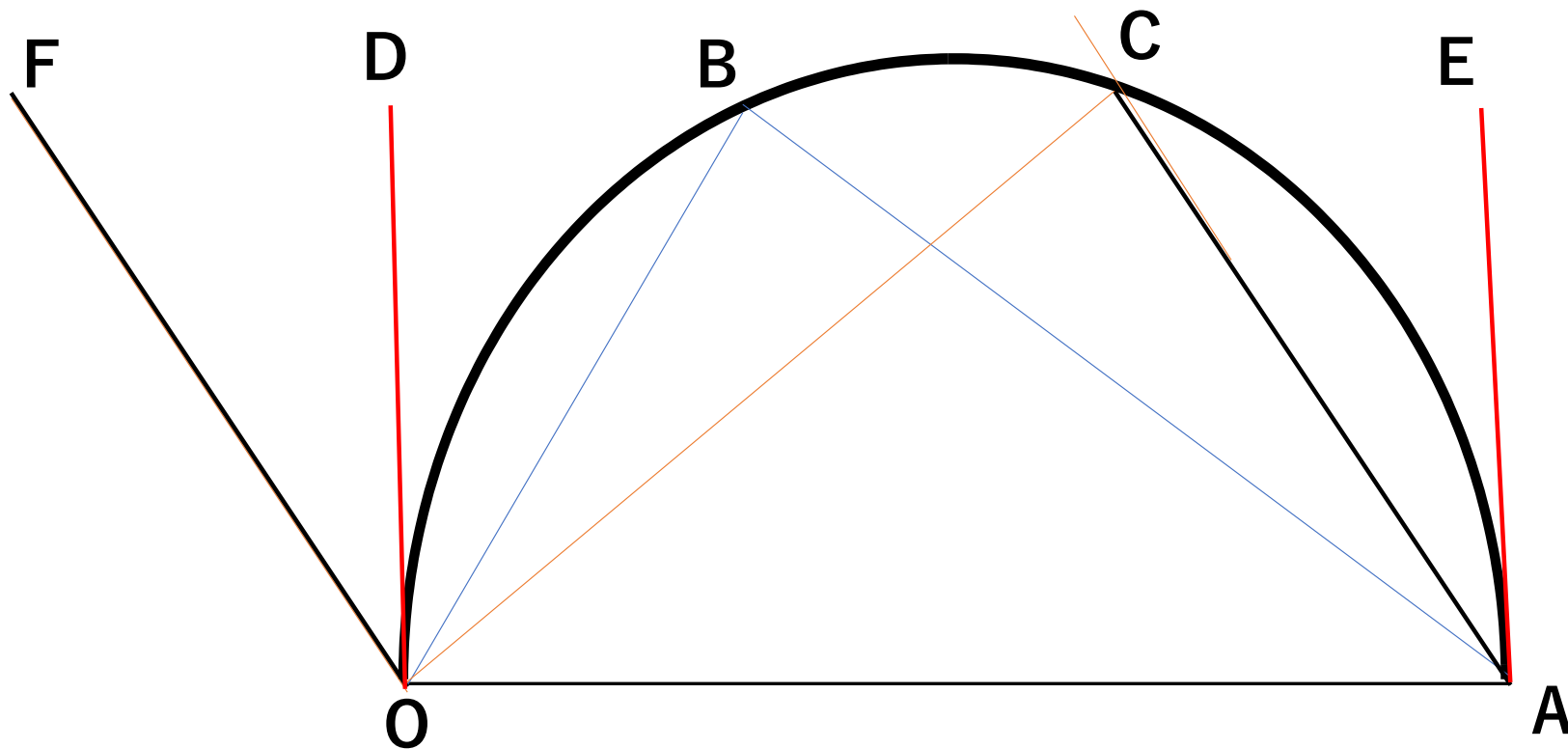


## 反射の法則Ⅲ

DO,EAは、垂線なのでそれぞれ $90^\circ$  からひいて  $\angle DOB = \angle EAC \cdots (イ)$

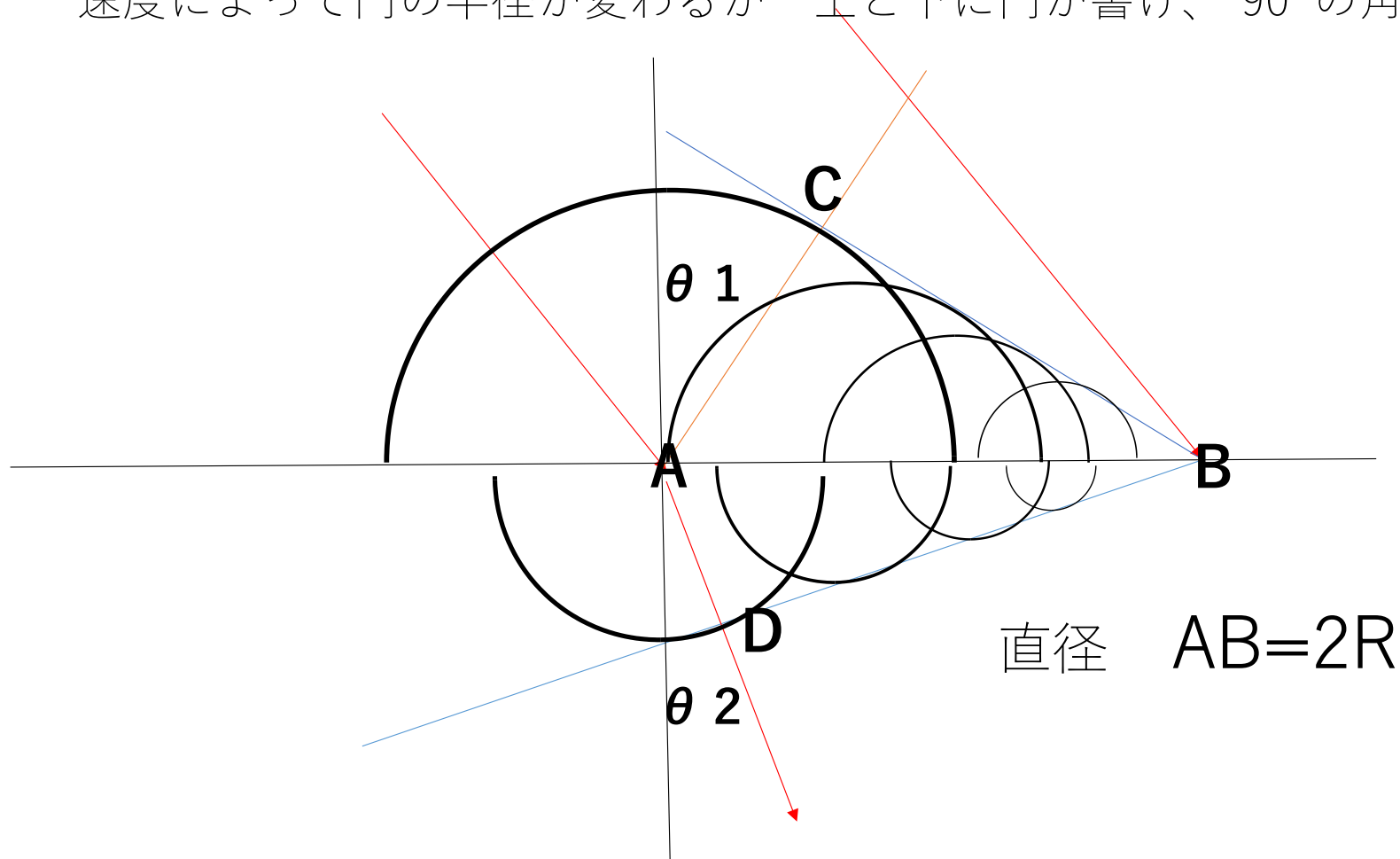
OB,FE は平行に差し込んでいるので  $\angle DOF = \angle EAC \cdots (ロ)$

(イ) (ロ)から  $\angle DOB = \angle DOF$  すなわち  $\angle DOF$  (入射角) =  $\angle DOB$  (反射角)



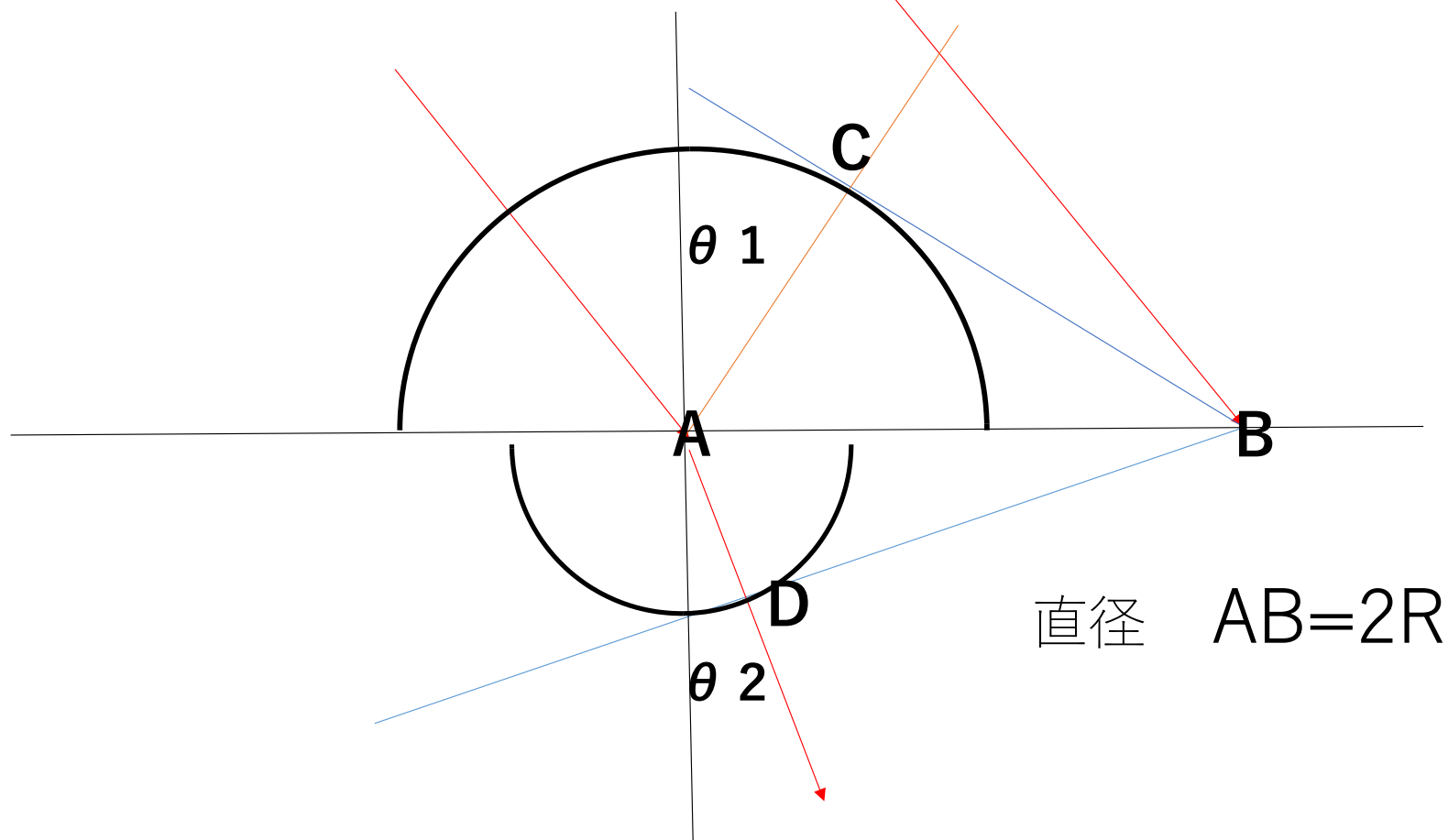
# 屈折 I

速度によって円の半径が変わるが 上と下に円が書け、 $90^\circ$ の角が向かいあう



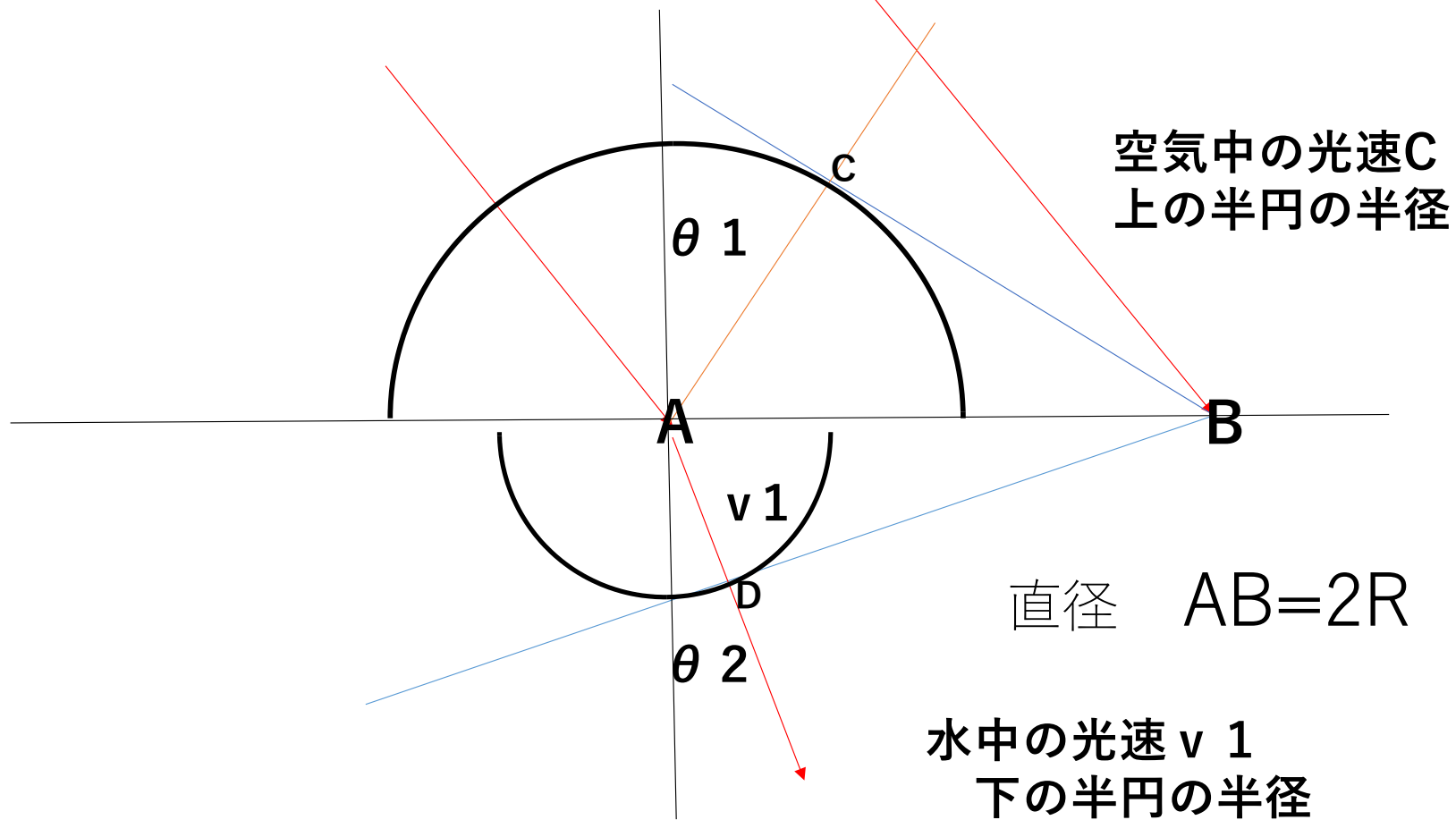
# 屈折 I

速度によって円の半径が変わるが 上と下に円が書け、 $90^\circ$ の角が向かいあう



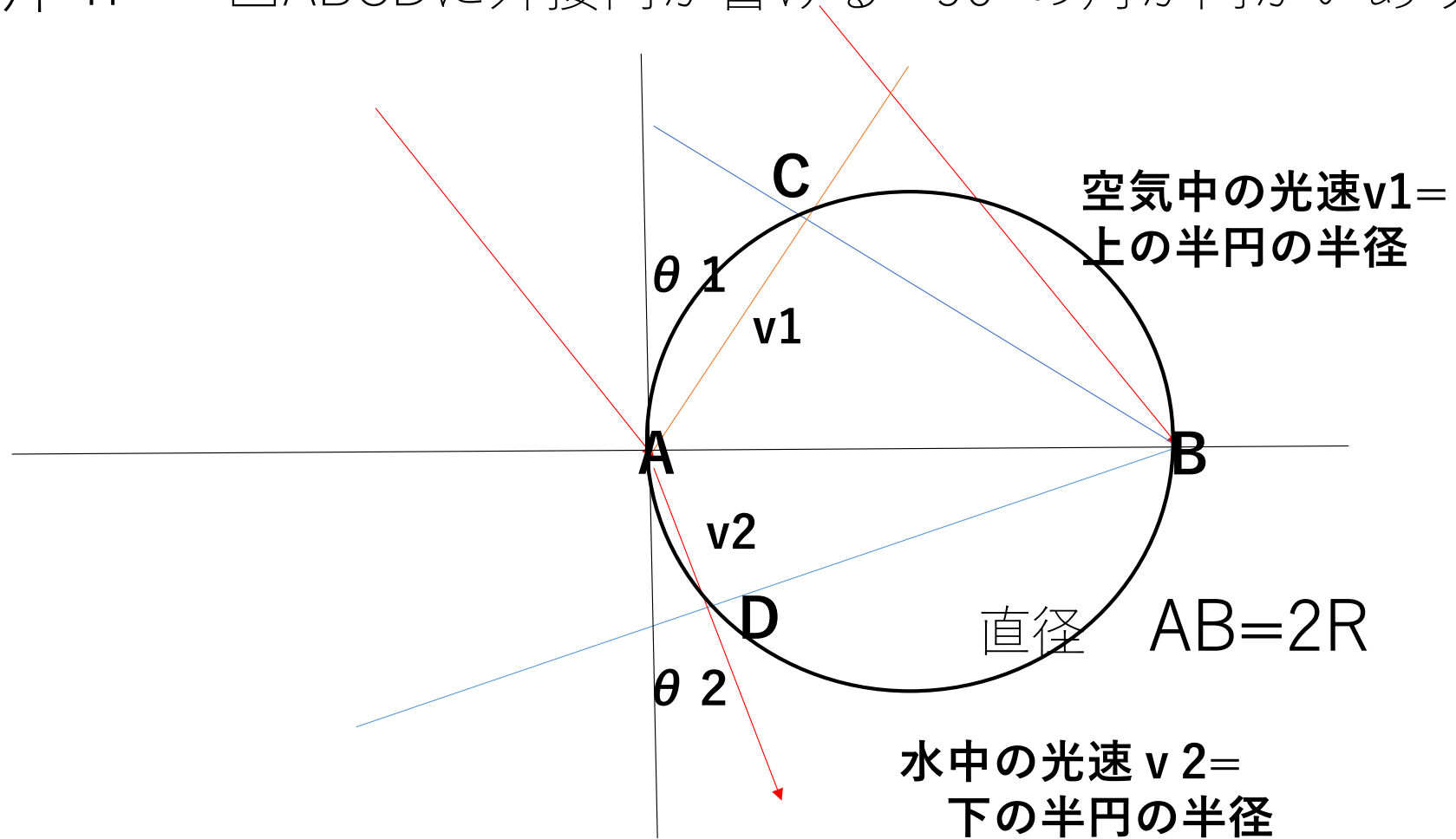
# 屈折 II

これも□ABCDに外接円が書ける 90°の角が向かいあう



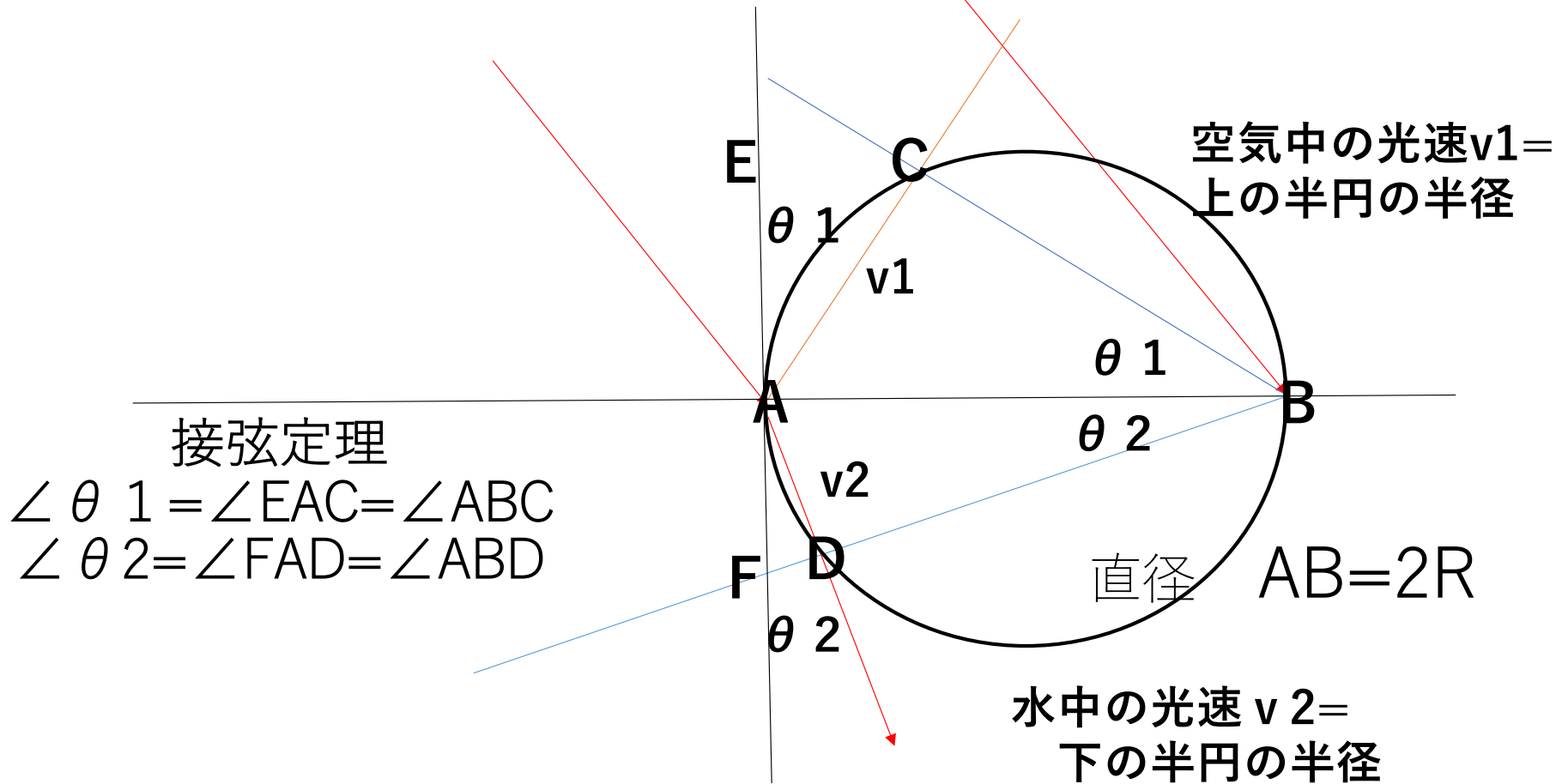
# 屈折 II

□ABCDに外接円が書ける  $90^\circ$  の角が向かいあう



# 屈折 III

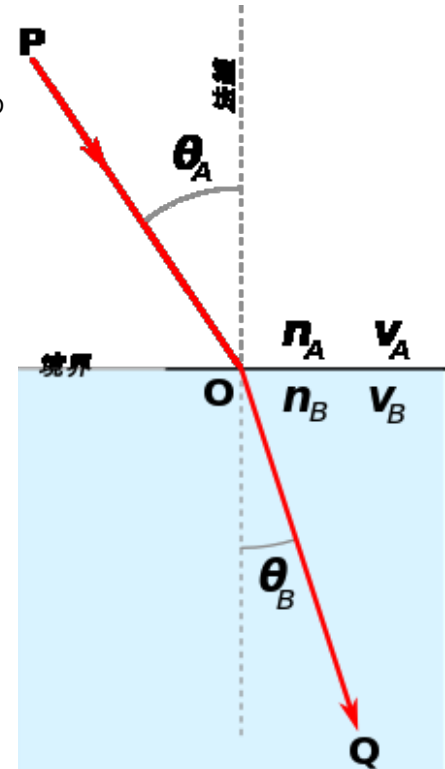
接弦定理と正弦定理の活用



# 光の屈折の法則(スネルの法則)

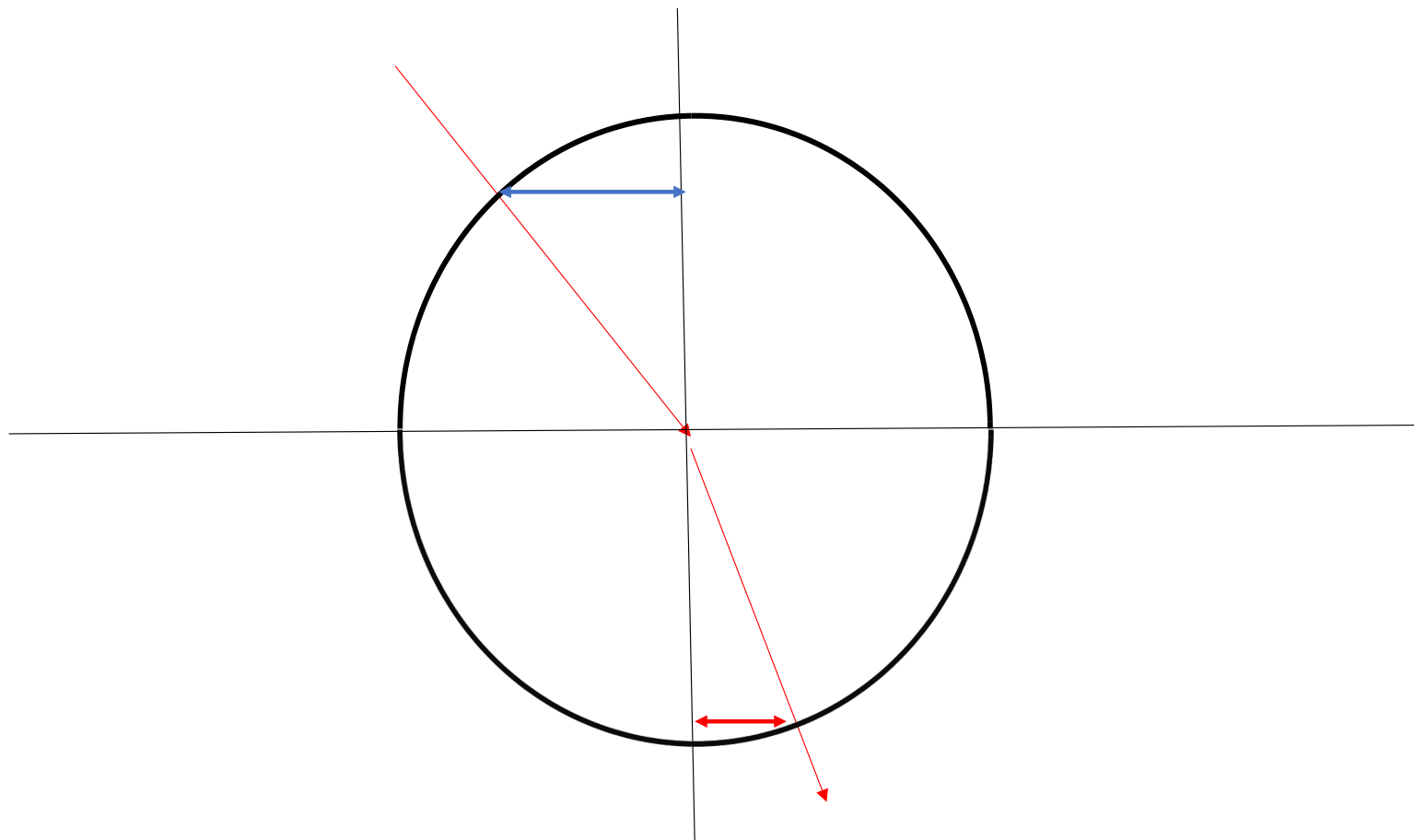
- 最後に正弦定理を用いることにより、屈折の法則(スネルの法則)が導かれる

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$



# 屈折率の意味

赤線の長さ : 青線の長さ =  $v : c$





- スメルスの法則と正弦定理 円の半径を仲立ち
- 式が似ている 現象に共通の原理・背景がある
- 素元波→波面が円→円と角が関係→正弦定理
- 過去の例 トレミーの定理 + 正弦定理→加法定理
- 正弦定理で加法定理を証明
- 円と  $90^\circ$
- 光は真空中 最も速い 屈折率の定義の意味 1 より
- 大

# 後半 最速降下曲線の導出へ



## 最速降下曲線についてーベルヌーイの発想でー

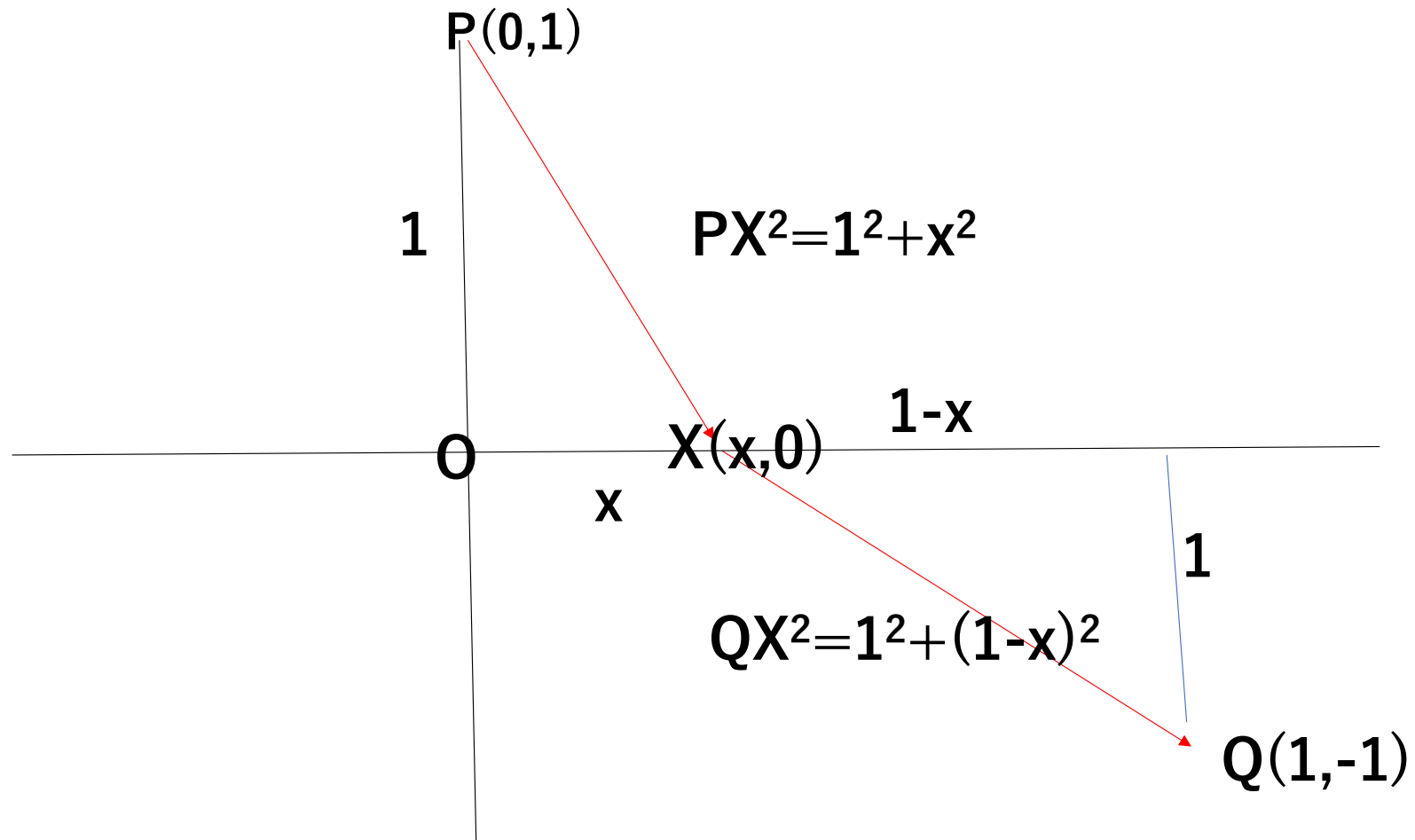
- 光の屈折の法則(スネルの法則)をホイヘンスの素元波のアイデアから図形的にも説明したが、現在、一般的には光が最短経路をすすむという性質から、微分を用いた極小問題として導かれる。

そして、屈折の法則から、ベルヌーイの薄膜を無限に重ねるという微分・積分的発想から、変分法をつかわなくても

重力のみが働く二点間の最速降下経路、すなわち最速下降曲線はサイクロイドという結果が導かれる。

これは、重力場という考え方の萌芽とみることもできる。

屈折の法則を微分の極値問題として



## スネルの法則を微分で示す (極小問題)

P(0,1)から境界を通過する点Xまでの距離をPX  
XからQ(1,-1)までの距離をQXとすると

$$PX = \sqrt{1+x^2}, \quad QX = \sqrt{1+(1-x)^2}$$

PからQへの到達時間は

と表され、この時間が最小になるような経路が  $\frac{PX}{V_A} + \frac{QX}{V_B}$   
実際に光が通る経路である。

三平方の定理から

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{V_A} + \frac{\sqrt{1+(1-x)^2}}{V_B}$$

スネルの法則スネルの法則を微分で示す II (極小問題)

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{V_A} + \frac{\sqrt{1+(1-x)^2}}{V_B}$$

後は、これを微分し、 $=0$  となる $x$ の値を求めれば良い  
無理関数の微分法・合成関数の微分法を用いると

$$\frac{x}{V_A \sqrt{1+x^2}} - \frac{1-x}{V_B \sqrt{1+(1-x)^2}} = 0$$

図から

$$\sin \theta_A = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin \theta_B = \frac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}}$$

なので  $\frac{V_A}{\sin \theta_A} = \frac{V_B}{\sin \theta_B}$  とスネルの法則が導かれる。

## スネルの法則スネルの法則を微分で示す II (極小問題)

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{V_A} + \frac{\sqrt{1+(1-x)^2}}{V_B}$$

物理ではこれを微分し、 $=0$ となる $x$ の値を求めれば良いと記述してある。  
数学の問題としてみるときちんと増減表を書いて、最大・最小を求めるということになるが、これを微分したものの符号を調べるのは、難しい。

ここで、ここでグラフ電卓を活用し、概形を見てみる。

それから、問題の式を眺めると  $PX = \sqrt{1+x^2}$  ,  $QX = \sqrt{1+(1-x)^2}$

の正係数の和であり、としていずれも  $x \rightarrow \infty$  で  $\infty$

$PX$ は  $x=0$ 、 $QX$ は  $x=1$  で対称なので

微分が0のところでは最小値を取らず。

また、現象の物理的考察から最大値となることはありえない。

それで物理では、微分 $=0$  で極小としているのではないだろうか

## スネルの法則から最速降下曲線

- ヨハン・ベルヌーイは、物体が重力の下で、一定距離落下するときに、どのような曲線(この曲線が最速降下曲線)に沿って落下したとき、最短時間となるか? という問題を次のように考えた。
- スネルの法則は、媒質Aから媒質Bへ光が伝わる時 A と B の 速度が異なるので、その到達時間が最短になるように、境界面で屈折することを表している。その式は、屈折角と速度が比例すると解釈できる。
- 上の落下の問題では、媒質は変化しないが、重力により速度は刻々変化している。従って、刻々変化する速度に比例して、屈折角も変化すると考えたのである。重力によって速さが変化することを、速さが 速くなる(屈折率の異なる)ような無限に薄い媒質の無限に重なった層を通過するとも考えられる。



## 微分方程式の導出

- これを式で表すために 座標軸を右のように  
y軸を下向きに設定する。

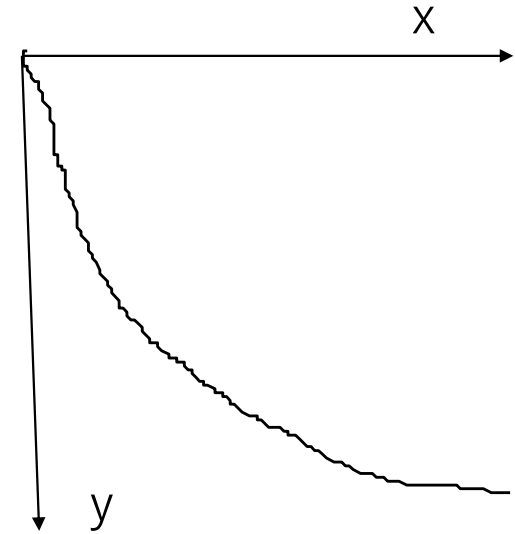
軌跡の方程式を $y=f(x)$  とすると

他に力の働かない重力の下での落下の法則より

落下距離 $y$ は

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

速度  $v=gt$  は  $v = \sqrt{2gy}$  ……① と表せる。



またスネルの法則から速度が変化しても **角と速度の比**が変わらないので

$$\frac{v}{\sin \theta} = K \cdots \textcircled{2} \quad (k:\text{定数}) \text{ と置くことができる。}$$

$\sin \theta$  は  $dx, dy$  を二辺とする直角三角形を考えると  $\sin \theta = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} \dots \textcircled{3}$

$$v = \sqrt{2gy} \dots \textcircled{1} \quad \frac{v}{\sin \theta} = K \dots \textcircled{2}$$

- $\textcircled{2}$ へ $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{3}$ を代入し、両辺を2乗して
- $k^2/2g=c$  とおき、 $dx=$  の形に整理すると

$$dx = \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy \dots \textcircled{4}$$

これが高校数学IIIの知識で、積分できればを代入し最速降下曲線を求められたことになる。

## 数学Ⅲの知識で、解ける可能性を探る

- ここは参考にした「ベルヌーイ家の遺した数学」松原望でも

「 $\sqrt{\quad}$ 内の分母を処理するために

$$y = (c/2)(1 - \cos S) \quad \text{と置換して、}$$

若干の三角関数の操作の後、積分は求められて」

とあるが、この置換をどう思いついたかはわからない。

高校生のレベルでどう変形できればよいか推理してみる。

$\sqrt{\quad}$ があるので ルートの中が  $(\quad)^2$  の形になればいいな と考える。

ところが 文字式の変形だけでは難しい

(どうみても平方完成できる形ではない

すなわち 二次式・二次関数ではだめ→多項式ではだめ)

特別な関数を使う必要がある。しかし、高校の範囲では特別と言っても

指数関数・対数関数・三角関数しか候補はない。

候補を絞っていても 指数関数・対数関数はできそうにない。

しかし、三角関数なら 倍角公式それを逆に見た半角公式で

- ルートの中を  $(\quad)^2$  の形に出来る可能性がありそう

ここで  $\sqrt{\frac{y}{c-y}}$  の  $y$  をどう三角関数で置き換えるか?

$\sqrt{\quad}$  の中が  $\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$  か  $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$  のどちらかになればうまくいきそうである。

$\frac{y}{c-y} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$  とすると  $y \sin^2 \theta = c \cos^2 \theta - y \cos^2 \theta$  から  $y = c \cos^2 \theta$  と変数変換することになるが

$dy = -2c \sin \theta \cos \theta$  とマイナスになり、具合が悪い

$$\frac{y}{c-y} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad \text{とすると分母を払って} \quad y \cos^2 \theta = c \sin^2 \theta - y \sin^2 \theta$$

$$\text{移項して} \quad y \cos^2 \theta + y \sin^2 \theta = c \sin^2 \theta \quad \rightarrow \quad y(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = c \sin^2 \theta \quad \rightarrow \quad y = c \sin^2 \theta$$

$$y = c \sin^2 \theta \quad \text{とおくと}$$

$$dy = 2c \sin \theta \cos \theta d\theta \quad \text{となり、} \quad \int \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy = \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} 2c \sin \theta \cos \theta d\theta = \int 2c \sin^2 \theta d\theta$$

ここまでくれば、数学Ⅲの頻出 半角公式の出番で、積分できて

$$\int \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy = \int 2c \sin^2 \theta d\theta = \int c(1 - \cos 2\theta) d\theta = c\theta - \frac{c \sin 2\theta}{2} + c_0 = x \text{ となる}$$

(④の  $dx$  ,  $dy$  の関係式  $dx = \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy$  この右辺の積分を求めて、これが  $x$  に等しい)

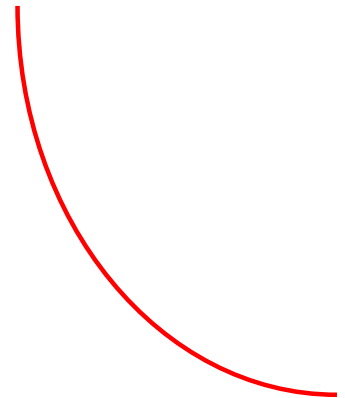
## サイクロイドの式へ

- $c_0=0$  とし  $y=c\sin^2\theta$  も  $2\theta$  であらわすと

$$x = c\theta - \frac{c}{2}\sin 2\theta$$

$$y = \frac{c}{2} + \frac{c}{2}\cos 2\theta$$

これは 下に凸のサイクロイドで  $2\theta=t$  とおくと、 $t=0\sim\pi$  で  
右の図のように降下曲線を表している。



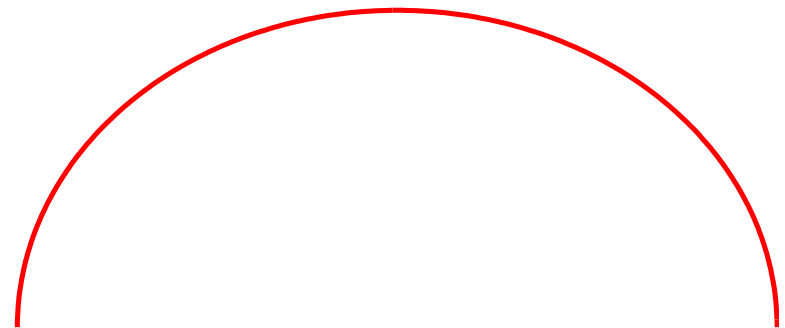
## 数学IIIの教科書のサイクロイドの式との比較

- 教科書のサイクロイドの式

$$x = ct - c \sin t$$

$$y = c - c \cos t$$

は 角 $t$ が時計回りを正として、円が右に回転していく場合の周上の点を表しているなので式の形が変わっていて、上に凸となっている。





さらに  $\sin t$ ,  $\cos t$  を消去すると

$$(x-ct)^2 + (y-c)^2 = c^2$$

と サイクロイド (擬円 cycloid cycle +loid) と円との違いがはっきりする。

ご静聴ありがとうございました。

- 参考文献 「ベルヌーイ家の遺した数学」 松原望

この本では変数変換が  $y=(c/2)(1-\cos\theta)$  と  
少し天下り気味なので  
一本道ではありませんが、生徒でも思いつけないかと  
工夫してみました。