第21回グラフ電卓研究会（2021年11月20日）Zoomミーティング

解釈，分析，予測を趣旨とする例題の有効性と作成法の考察

松田　修（津山高専）

はじめに

ICTの発展に伴って蓄積し続けるデータを有効活用しようという意識の高まりから,

2016年：文部科学省高等教育局専門教育課から**「大学における数理・データサイエンス教育強化の必要性」が提示**され，現在，各大学が次々とデータサイエンス教育研究センターを立ち上げている.

2018年8月から2019年3月：経済産業省主催の産業界と大学等の有識者たちを集めた「理数系人材の産業界での活躍に向けた意見交換会」が開催され,
「数理資本資本主義の時代～数学パワーが世界を変える～」と題する議論がなされた.
その報告書の第２節「数理資本主義の出現」では，**数学教育の重要性が強く叫ばれている.**

当然，アメリカ，イギリス，フランスといった先進各国においても，数学はイノベーションを生む中核とされ，経済に与える影響が高いものとして，これまで以上に数学を重視してきている.

一方，数学教育においては，2012年のソウルで開催されたICME12においてFreudenthal賞を受賞したフランスの数学教育学者 Chevallard（シュヴァラー） の新しい教授パラダイムに関する論文が注目されている．

Chevallardは，「**なぜ学ぶ必要があるのか**」が示されないまま定型的問題に対する定型的解法をただ学習する教育ではなく，中心となる大きな問いを学習者に投げかけ，学習者がその問いを中心として自ら様々な問いを生み出して学習していく教育パラダイムへのシフトが必要であると主張する．

本研究では，経済産業省が第四次産業革命に向けて期待する数学教育に繋がる数学教材として，そして**学生の数学を学ぶ態度をより良い方向に向かわせるために**，Chevallardの問いかける**「なぜ学ぶ必要があるのか」を意識できる数学教材**として，

解釈，分析，予測を趣旨とする例題というものを取り上げ，

それらの有効性とその作成法について研究する．

学ぶ理由と自ら学ぶ意欲

理工学系の高専や大学に入学してきた学生のほとんどが，それまでの自分自身を，数学が得意であった，数学への知的好奇心をもっていたと評価しているが，その後，高専や大学で学ぶ数学が，過去に学んだ数学以上に彼らの知的好奇心を掻き立てて，さらに現実社会で使える場面をイメージできるなら，学生たちはこれから学ぶ理由を強く見出し，より自ら学ぶ意欲が増していくものと考える．

では，自ら学ぶ意欲とは何だろう．

櫻井[Sa]によれば，自ら学ぶ意欲とは，自発的に学ぶ動機のことで，学習動機の1つと考えられ，他者からやるように強制されて仕方なく学ぶ「統制的な学ぶ意欲」と対置される概念であるとしている．そして，自ら学ぶ意欲の直接的な源には，

「知的好奇心」，「有能さへの欲求」，「向社会的欲求」，「自己実現の欲求」

の４つの欲求があるとする．
　そしてこれらの４つの欲求に基づく学ぶ理由が自ら学ぶ意欲を生み出すと主張する．

参考文献　[Sa] 櫻井茂男，自ら学ぶ意欲の心理学，有斐閣，2009

知的好奇心は，おもしろいから，楽しいからという感情や，もっと知りたい理解したいという好奇心のことである．

有能さへの欲求とは，最初は他者から与えられた課題を上首尾に達成しようとする欲求で，最終段階では，自分で課題を選択しその課題を上首尾に達成しようとする欲求のことである．

向社会的欲求とは，職業での達成といった人生の目標をもち，生き生きと学ぶ（働く）人間を想定して，社会や人のために役に立ちたいという欲求で，

自己実現の欲求とは，自分のよいところを生かし自分らしく生きたいという欲求のことである．

統制的な学ぶ意欲に属する学びの理由は，多様であるが，報酬が欲しいから，他者にやりなさいと言われたから，悪い成績をとりたくないから，他者から能力が高いと褒められたいから，世間の人が言うようなよい仕事に就きたいから，重要な他者の期待に応えないと悪いから，出世したいから，他者に勝ちたいから，勉強しないと頭がわるくなるから，などが挙げられる．

櫻井は，我々は誰もが自ら学ぶ理由とともに統制的に学ぶ理由をもっているが，統制的に学ぶ理由を自ら学ぶ理由よりも強くもってしまうと，不適応や精神的に不健康になることが多いことを注意している．

解釈，分析，予測の定義

自ら学ぶ意欲に繋がる具体的な数学教材の開発を目指して，解釈，分析，予測を趣旨とする例題を取り上げ，その有用性と具体的な作成法について論じていく．

そのためには，解釈とは何か，分析とは何か，そして予測とは何かといったことを定義しておく必要がある．

ここでは，数学教育とは多少異なるが，文学教育論における解釈と分析に関する鶴田の論文[TS]を参考に，**例題を解くという行為に対する解釈，分析，予測の定義について考えていく．** ところで，[TS]では予測については扱っていない．
しかし予測とは，一般には，将来のことを得られた情報などに基づいて推しはかるといった意味合いがあるので，解釈と分析から生まれる行為と捉え，鶴田の議論を参考に，例題を解くという行為に対するその定義を考えていく．

参考文献 [TS] 鶴田清司，〈解釈〉と〈分析〉に基づく文学教育論の構築ー新しい解釈学理論を手がかりにー，早稲田大学大学院教育研究科博士学位審査論文，2007

[TS]の中で鶴田は，新しい解釈学理論（ハイデガー，ガダマー，ボルノー，キュンメル，リクール，パーマー）を手掛かりに，テキストを読むという行為に解釈と分析の二つの対照的な立場があることを示している．

そして，**解釈とは，**「作者の想」ではなく「読者の役割」を重視したもので，読者の生活経験に基づく既有知識（前理解）をもとにテキストを対話的・歴史的・状況的に理解するという読みであるとする．

また，**分析とは，**形式的なスキルではなく，解釈を生成・発展させるための手段であり，理論的・科学的な知識（コード）をもとにテキストを還元的・共時的・技術的に理解するという読みである，としている．

以下において，鶴田が与えた「テキストを読む」という行為に対する「解釈」と「分析」の定義に対比させ，「例題を解く」という行為に対する「解釈」と「分析」を定義し，さらに解釈と分析から生まれる「予測」を定義する．

(定義1) **解釈とは，** 問題の解に繋がる適切な方法を見つけるために，自分の既有知識をもとに与えられたデータや条件などに意味づけを行い，そこに潜む法則や解法を予想する行為である．

(定義2) **分析とは，** 解釈から得られた法則や解法の正しさを，現時点で示されている関数や数値などのデータを用いて判断していく行為である．

(定義3) **予測とは，** 解釈と分析から得られた法則や解法を，数式などを用いて命題や公式という形で表現することで，現時点では示されていない新たなデータを提示できるものである．

（例題１）

数列 1, 1, 2, 3, 5,・・・の法則を予測し，第10項までの数を並べよ．

例題１の目的は，有限個の数のデータから今後続くであろう数列の法則を予測することにある．

学生たちは予測を完了するために，最初の５個の数 1, 1, 2, 3, 5を，

それぞれの既有知識をもとに解釈し，
その後分析という行動に移って，
予測へと繋げていく

と考えられる．

Aという学生は，n 番目の数はそれ以前にある数と何らかの関係をもつと考え，第3項の数2が二つ前の第1項の数1に一つ前の第2項の数1を加えたものと解釈した．そして，第4項と第5項も同じ法則に従っているかどうかをチェックすることで，第5項目までの数をこの解釈に基づいて分析した．このような解釈と分析から，この数列の第 n 項を文字 a_n で表し，自分の解釈から得られた法則を式で表すことを試みた．その結果，この法則は数学的に「$n \geq 3$ については漸化式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ に従う」という予測を立てることができ，これによって，第6項以降の数も列挙することができるとした．すなわちAはフィボナッチ数列を予想したのである．以上により，Aが予想した漸化式から得られる数列の第10項目までの数は，

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89$$

となった．

一方，Ｂという学生は，既有知として整数の分割数の知識があった．Ｂはここに並んだ５つの数は整数の分割数に関係すると解釈した．そしてこの解釈に基づいて第５項目までの数を分析した．確かに，第１項の数１は数０の分割数，第２項の数１は数１の分割数，第３項の数２は数２の分割数（2，1+1），第４項の数３は数３の分割数（3，1+2，1+1+1），第５項の数４は数４の分割数（4，1+3，2+2，1+1+2，1+1+1+1）であることを確認した．Ｂは自分の解釈から得られた法則を数式で表すことはあきらめたが，しかしＢの解釈と第５項目までの分析から，「この数列の第 n 項は数 n の分割数である」という予測を立て，最初の 10 項は，

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 15,\ 22,\ 30$$

となることを示した．

このように，解釈，分析，予測を趣旨とした例題１のようなタイプの問題は，オープンエンドの問題（cf. [OQ]）とも呼ばれてもいるが，様々な解釈から始まって，それぞれ解釈に基づいた分析を経て予測へと繋げていくものであり，解釈によっては教師が想定しなかった興味深い予測が得られる可能性だけでなく，学生同士でこのような解釈の違いがあることを共有することで，個々の学生の新たな知見が得られる可能性ももっている．

解釈→分析→予測という例題の有効性

鶴田[TS]は，さまざまな実践事例を検討して，テキストを読むという行為に対する解釈と分析の功罪についても論じている．

鶴田[TS]はテキストをよりよく理解するためには，解釈と分析の統合が必要であるとし，２０世紀後半の解釈学（リクールなど）の論考を手がかりにして，これらの統合という問題に取り組んだ．そして最終的に，テキストのよりよい理解のための解釈と分析の統合のあり方は，

解釈→分析→解釈

という方法・過程，つまり，作品と出会って，まず自分の原初的な解釈を生成すること，それに分析を加えることによって，さらに豊かで深い解釈を導いていくという読みの方法・過程が望ましいと結論づけた．

以上のことから，本研究では，テキストのよりよい理解のためには，解釈→分析→解釈という方法・過程が望ましいという鶴田の主張を重視し，数学教育においても，

解釈→分析→予測という過程がとれる例題を提示することは，

その単元で学ぶ数学の内容をよりよく理解するために有用であると主張したい．

そのような例題は，自分の原初的な解釈ができるものであることから，自ら学ぶ意欲を喚起させる効果があり，自ら立てた解釈を数学的な根拠に基づいて分析することで，自らの解釈をさらに深いものにできる効果があり，予測という作業から数学的な定式化を学ぶことができる効果があるからである．

オープンエンドな例題の適切な設定について

　例題を提示するということは，学習者に対して，その単元で扱う学習内容を具体的な形で理解してもらうという教育的意図が前提にある．

　したがって，たとえ解釈→分析→予測という過程がとれるオープンエンドな例題であったとしても，例題の設定が学習内容の意図からかけ離れていると，学習者にこの例題によってどういった学びを獲得できるのかといったような不安が起こる可能性があり，それは効果的な例題とは言い難い．このことは，鶴田[TS]が論じた解釈と分析の危うさの論点にも通じている．

　ところで，数学という教科自体は，文学における自分勝手な解釈やこじつけた分析といった危うさを制御するという特性をもっている．すなわち，各単元ではそれまで学習したもの以外の新たな数学的な概念や道具の意味や使い方を与え，それによって，それまでに扱わなかったタイプの問題の解法を教える．

　つまり数学という教科は，解釈と分析の危うさを制御することを学ぶ役割を果たしているともいえる．

　ところが，近年の数学教育においては，上に述べた役割にある種逆行するかのように，数学モデリング（池田・山崎[IY]）やオープンエンド（島田[OQ]）といった解釈や分析を伴った例題を扱うことが主張され，注目されてきた．

　その理由の１つとして，教師の側だけが「数学を学ぶ意義」を考えるのではなく，
学習者自身が，それぞれの立場から「数学を学ぶ意義」を感じ取ってもらう機会を作るためであるという点を挙げたい．

　そのことによって，数学教育の１つのテーマである問題を自ら考え自らの力で解くことに繋がると考えている．

例題２． 以下の表の x に対する y のデータを近似する関数 $y=f(x)$ を予測せよ．

x	0	1	2	3	4	5
y のデータ	1.22	1.25	3.31	7.23	13.12	21.25

例題２の y のデータから，近似する関数 $y=f(x)$ は単調増加な関数であるという解釈は得られる．しかし，この時点で学習者が，多項式関数や指数関数，対数関数を既知としていた場合，どの関数で近似すべきかという意図が疑問となる．また，予測をどの程度の精度で考えてよいのか不明確であることも問題がある．したがって，学習者は例題２からどのような学習効果が期待できるのかが疑問となる．すなわち，この例題の問いかけに適切な教育的意図があると判断することはできないのである．そこで，例題２の設問文を以下のように変える．

例題２ A．以下の表の x に対する y のデータを２次関数 $y=f(x)$ で近似せよ．ただし，近似値とデータとの誤差は ± 0.5 の範囲とせよ．さらに，$x=10$ での y の値を推測せよ．

例題２ B．以下の表の x に対する y のデータを近似する関数 $y=f(x)$ を，２次関数または指数関数で予測せよ．ただし，近似値とデータとの誤差は ± 0.5 の範囲とせよ．さらに，$x=10$ での y の値をそれぞれ推測せよ．

例題２ Aは，２次関数の単元で扱える例題であり，その教育的意図は，２次関数を決めるための条件の理解であり，その条件を学習者が自ら設定することにある．まず，学習者は２次関数を決めるための条件とは何かを確認する作業から始め，その後，この場合において，自分が扱える条件の設定に入ることができるのである．さらに，近似値とデータとの誤差の指定があることで，ゲーム性が生まれ，取り組むための意欲を促す例題となっている．

例題２ Bは，２次関数と指数関数を学習した段階で扱える例題であり，その教育的意図は，２次関数を決めるための条件の確認と，指数関数の底の理解とそれを決定するための方法の確認である．さらに，$x=10$ での y の値から，２次関数と指数関数の違いを見ることもできる．

解釈，分析，予測を趣旨とする例題の作成法

解釈，分析，予測を趣旨とするオープンエンドな例題の作成法について考える．このようなタイプの例題を作るには様々な方法があるだろう．

しかし，このタイプの例題を単なるオープンエンドなものにしないためにも，前節で述べたように，学習内容に対する教育的意図を持った例題であることが望ましい．

一方，教科書等でよく見られる例題は，それぞれの単元で理解してほしい基本的な定理や公式を含んだものとして列挙されている．

したがって，本論文では，教科書等で扱われる基本的な例題とそれらの意図をヒントに，解釈，分析，予測を趣旨とするオープンエンドな例題の作成法を提示する．

例題３． ２次関数のグラフで，次の条件を満たすものをそれぞれ求めよ．

(1) 頂点の座標が $(1,2)$ で点 $(0,1)$ を通る．

(2) 直線 $x=2$ を軸とし，２点 $(0,-1)$，$(3,-10)$ を通る．

(3) ３点 $(0,-1)$，$(3,-10)$，$(0,-1)$ を通る．

例題３の意図は，(1) 定義域の概念理解，(2) 2 次関数には極値が１つだけ存在しているという性質の理解，(3) グラフの概形の理解，(4) グラフの頂点の座標の理解，(5) 最大値と最小値の概念の理解などである．そして，例題３の意図を元にして，学習者自らが上のような条件を設定して，近似する 2 次関数を決定する例題を，以下のように作成することができる．

例題３ A．以下の表のデータを，必要なら方眼紙を利用して，2 次関数で予測せよ．ただし誤差（Data-予測値）は ± 0.3 以内とせよ．

x	0	1	2	3	4	5
Data	-6.01	-0.19	2.95	2.79	-0.21	-6.05
予測値						
誤差（Data-予測値）						

例題 3A は，２次関数のグラフの凹凸という解釈から始まる．さらに，(1) 方眼紙にデータをプロット，(2) 2 次関数のグラフとしてのおおよその近似曲線をかく，(3) 2 次関数を決定するための条件の検討，(4) 仮の 2 次関数の式を立てる，という 4 つのステップを踏むことで，データの詳細な解釈が得られる．その解釈をもとに，以下の分析の作業を始める．(5) 立てた数式から予測値を記入する，(6) 誤差（Data-予測値）による予測値の分析を行う．この時点で，誤差（Data-予測値）が ± 0.3 以内となっていない欄があったら，再度 (3) または (4) に戻り，2 次関数の式を立て直し，それに従って分析を行う．これを誤差（Data-予測値）が ± 0.3 以内になるまで繰り返し，最終的な近似 2 次関数の予測式を確定する．

例題４． 以下の三角関数のグラフの概形を描け.

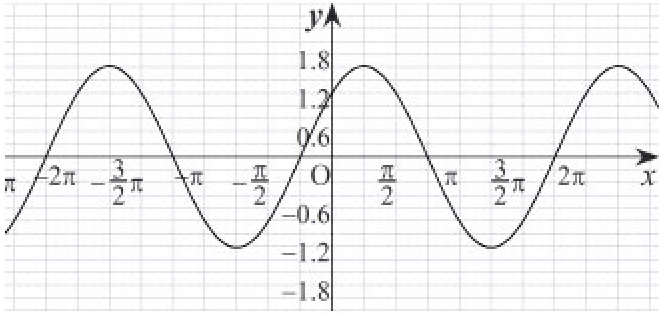
(1) $y = \sin 2x$　　(2) $y = \cos \dfrac{x}{3}$　　(3) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$　　(4) $y = \sin x + \cos x$

上の例題は三角関数の単元で扱われるものである．そして，４つの意図が含まれる問題で，それらは (1) 周期の理解，(2) 最大値と最小値の理解，(3) 平行移動の理解，(4) 三角関数の合成の理解である．そして，例題４の意図を元にして，解釈，分析，予測を趣旨とする三角関数とそのグラフを決定する例題を，以下のように作成することができる.

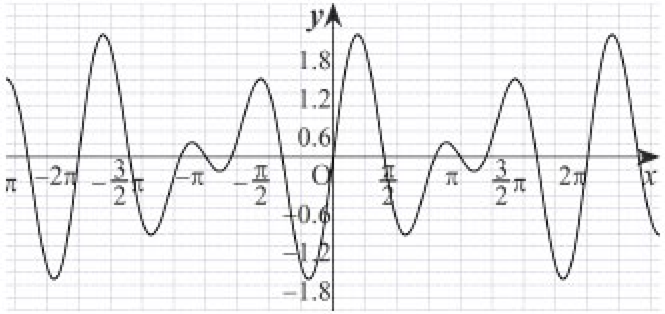
例題 4 A．以下の関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$ のグラフは，次に挙げる (A) から (F) の関数のうちどの関数のグラフだと予測できるか．

(A) $y = \sin 2x + \sin 3x$　　(B) $y = \sin x + \cos 2x$　　(C) $y = \sin x + \cos x$

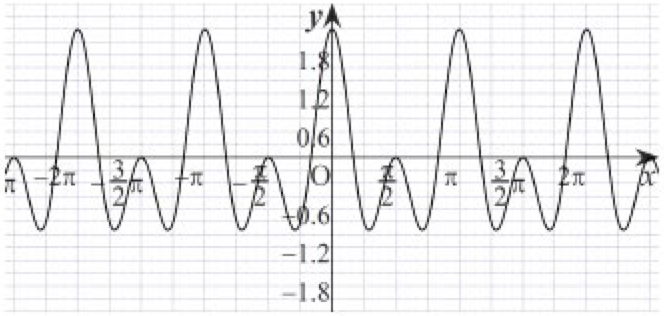
(D) $y = \sin 2x + \cos x$　　(E) $y = \cos x + \cos 4x$　　(F) $y = \cos 2x + \cos 4x$



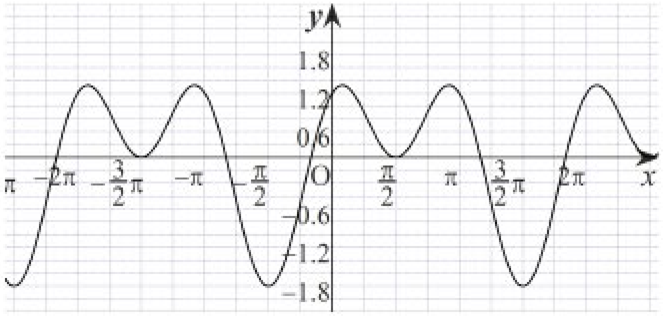
$y = f_1(x)$ のグラフ



$y = f_2(x)$ のグラフ



$y = f_3(x)$ のグラフ



$y = f_4(x)$ のグラフ

例題 4A は，三角関数のグラフの概形を方眼紙に描かせて，それらの特徴を理解させるという目的ではなく，グラフという画像データを読むという立場から，与えられた様々な三角関数のグラフの特徴を，学習した知識を使って大まかに理解するという点を重視したものである．そのために，まず与えられた関数を解釈するのではなく，グラフを解釈させることを促す．たとえば，(i) 周期が 2π であるものは，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ と $f_4(x)$ であると解釈できること，(ii) 周期が π であるものは，$f_3(x)$ のみと解釈できること，(iii) $y = f_1(x)$ のグラフは，単振動の合成のグラフと解釈できるということ，(iv) $y = f_2(x)$ のグラフは，奇関数のグラフと解釈できること，(v) $y = f_3(x)$ のグラフは，偶関数のグラフであることと $f(\pi/2) = 0$ であると解釈できること，(vi) $y = f_4(x)$ のグラフは，$f(\pi/2) = 0$ と解釈できること，などが挙げられる．

このようなグラフの解釈をもとに，関数の分析を以下のように行うことができる．(i’) 周期が 2π である関数は (B)，(C)，(D)，(E) と (F) である．(ii’) 周期が π である関数は (A) である．(iii’) 単振動の合成は (C) である．(iv’) 奇関数は (A) である．(v’) 偶関数は (E) と (F) である．(vi’) $f(\pi/2) = 0$ である関数は (D) と (F) である．

以上をもとに，各グラフに対する関数を以下のように予測できる．[予測 1] $y = f_1(x)$ のグラフは単振動の合成であることと，周期 2π ととれることから，関数 (C) $y = \sin x + \cos x$ のグラフである．[予測 2] $y = f_2(x)$ のグラフは奇関数のグラフであることと，周期 2π ととれることから，関数 (B) $y = \sin x + \cos 2x$ のグラフである．[予測 3] $y = f_3(x)$ のグラフは偶関数のグラフであることと，周期 π ととれることから，関数 (F) $y = \cos 2x + \cos 4x$ のグラフである．[予測 4] $y = f_4(x)$ のグラフは奇関数でも偶関数でもなく，単振動でもなく，さらに $f(\pi/2) = 0$ ととれることから，関数 (D) $\sin ax + \cos x$ のグラフである．

例題５．以下の関数の不定積分を求めよ．

$$(1)\ y = \frac{1}{x} \qquad (2)\ y = x^4 + 3x^2 \qquad (3)\ y = e^x \qquad (4)\ y = \frac{1}{x^2} + x$$

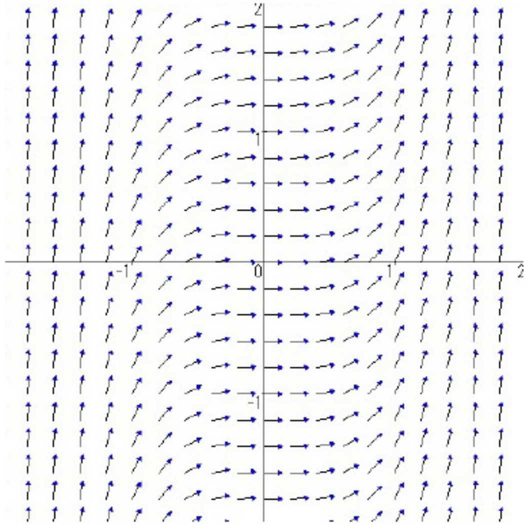
例題５は積分の単元で扱われる基本問題である．そして，これらには，(1) 原始関数の理解，(2) 不定積分の線形性の理解，(3) 積分定数の理解，という３つの意図が含まれている．例題５の意図を元にして，解釈，分析，予測を趣旨とする不定積分の例題を以下のように作成することができる．

例題５ A．導関数とスロープフィールドに関する以下の問いに答えよ．

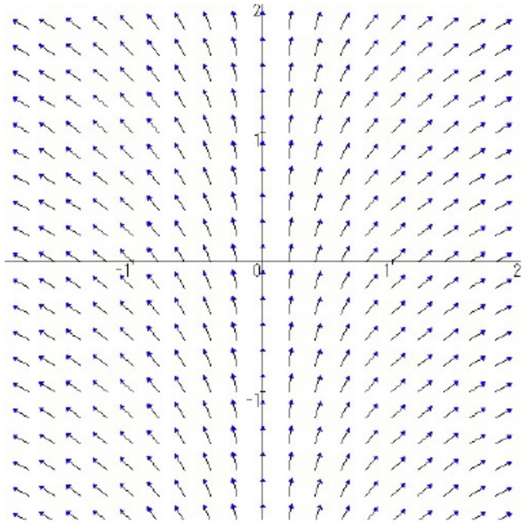
(問 1) 以下の式 (1), (2), (3), (4) は，ある関数 $y = f(x)$ の導関数をそれぞれ表している．このとき導関数から得られるスロープフィールドは，以下の図の A,B,C,D のそれぞれどれと予測されるか，理由を述べて答えよ．

$$(1)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (2)\ \frac{dy}{dx} = x^4 + x^2 \qquad (3)\ \frac{dy}{dx} = e^x \qquad (4)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x$$

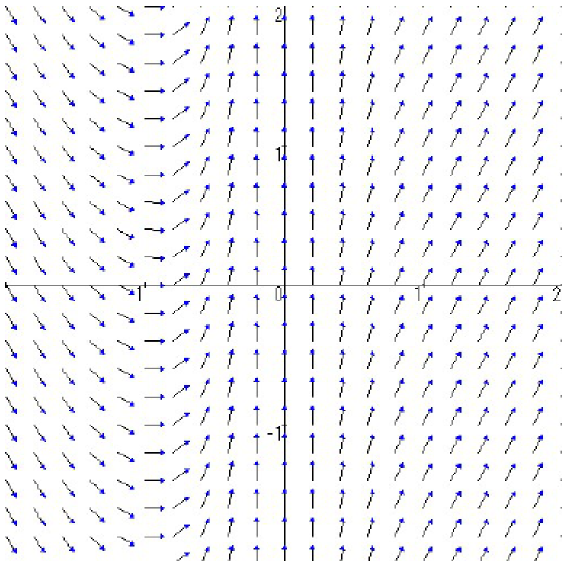
(問 2) 上の導関数の式 (1), (2), (3), (4) に対応する関数 $y = f(x)$ でそのグラフが点 (1,0) を通るものをそれぞれ求めよ．また，対応するスロープフィールドの図にそれらのグラフを描け．



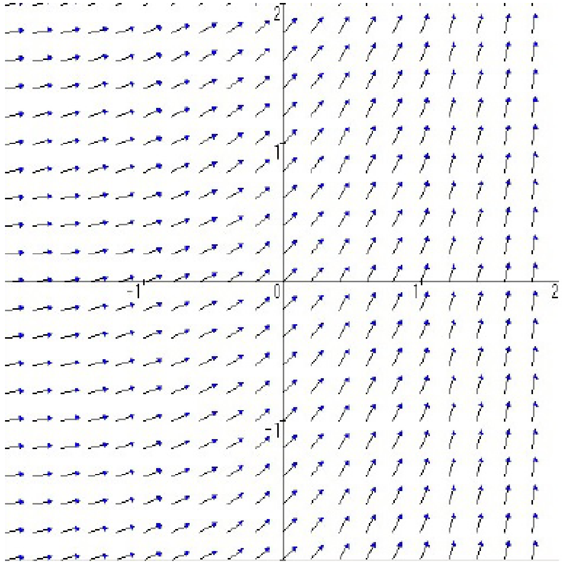
A



B



C



D

例題５ A は,（問 1) が解釈，分析，予測を趣旨とする問題である．これは，スロープフィールドという画像データを読むという立場から，導関数の特徴を大まかに理解するという点を重視したものである．そのために，まず与えられた関数を解釈するのではなく，スロープフィールドを解釈させることを促す．たとえば，(i) スロープフィールド A は，y 軸付近の勾配が 0 であると解釈できること，(ii) スロープフィールド B は，y 軸付近の勾配が極めて大きく，スロープフィールドが左右対称であると解釈できること，(iii) スロープフィールド C は，y 軸付近の勾配が極めて大きく，スロープフィールドが左右対称ではないと解釈できること，(vi) スロープフィールド D は，y 軸付近の勾配が 1 であると解釈できること，などが挙げられる．

スロープフィールドの解釈をもとに，導関数の分析を以下のように行うことができる．(i') スロープフィールドの y 軸付近の勾配が 0 である導関数は (2) である．(ii') スロープフィールドの y 軸付近の勾配が極めて大きい導関数は (1) と (4) である．(iii') スロープフィールドが左右対称となる導関数は (1) である．(vi') スロープフィールドの y 軸付近の勾配が 1 である導関数は (3) である．

以上をもとに，各スロープフィールドに対応する導関数を以下のように予測できる．[予測１] スロープフィールド A に対応する導関数は (2) である．[予測２] スロープフィールド B に対応する導関数は (1) である．[予測３] スロープフィールド C に対応する導関数は (4) である．[予測４] スロープフィールド D に対応する導関数は (3) である．

例題６．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ で表される線形変換によって，次の点はどのような点にそれぞれ移されるか．

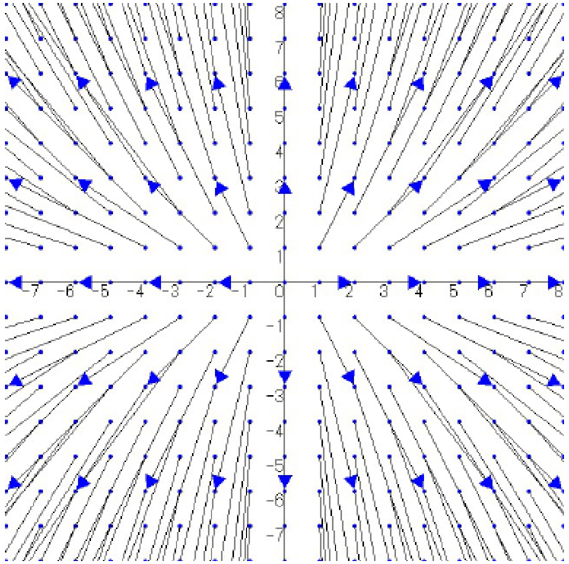
(1) 点 $(1, 0)$　　(2) 点 $(0, 1)$　　(3) 点 $(2, -1)$　　(4) 点 (a, b)

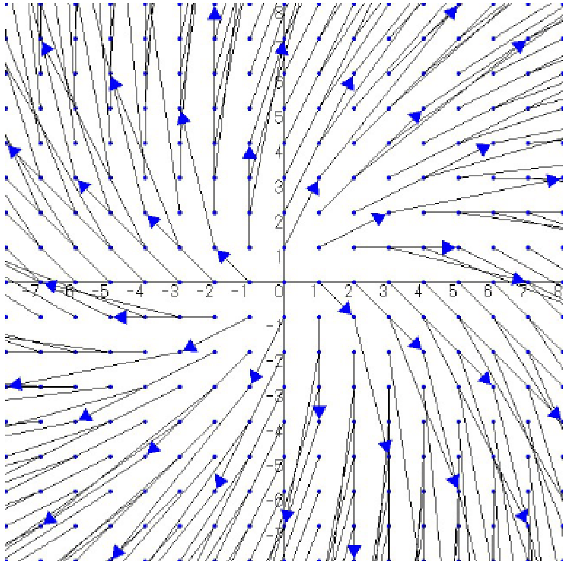
例題６は線形変換の単元で扱われる基本問題である．そして，これらには，(1) 行列とベクトルの積の計算法の理解，(2) 平面上の点に関する線形変換の理解，という２つの意図が含まれている．例題６の意図を元にして，解釈，分析，予測を趣旨とする線形変換の例題を以下のように作成することができる．

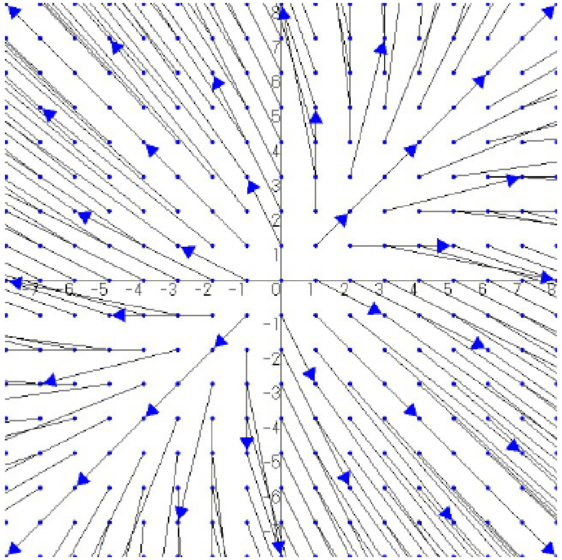
例題６ A．以下の図 A, B, C, D は xy 平面上の点 (x, y) の線形変換の様子を表している．ただし，矢印の始点は変換前の点を表し，矢印の終点は変換後の点を表している．図 A, B, C, D を与える変換行列は，どのような種類の行列で，さらに次の行列 (1) ～ (8) のどれとなるか，それぞれ分析し予測せよ．

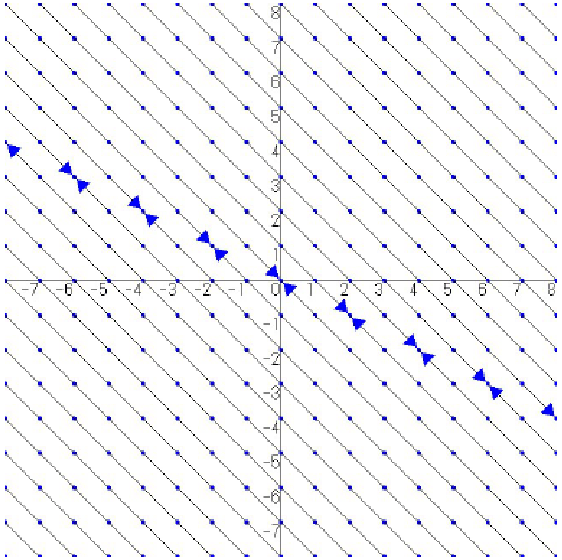
(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$


A


B


C


D

例題６Ａは，平面全体の点に作用する行列ということを考えてもらうことを重視している．まず，与えられたグラフを解釈させることを促す．たとえば，(i) 図Ａは， x 軸上の点は x 軸上に移動し，y 軸上の点も y 軸上に移動していると解釈できること，(ii) 図Ｂは，原点を中心とするある種の回転移動をしていると解釈できること，(iii) 図Ｃは，座標系とは異なる２つの直線があり，それぞれの直線上の点をその直線上の点に移動していると解釈できること，(iv) 図Ｄは全ての点が一つの直線上の点に移動していると解釈できること，などが挙げられる．

このようなグラフの解釈をもとに，関数の分析を以下のように行うことができる．(i) 図Ａは， x 軸上の点は x 軸上に移動し，y 軸上の点も y 軸上に移動しているので，その変換行列は対角行列と解釈できること，(ii) 図Ｂは，原点を中心とするある種の回転移動をしているので，その変換行列は交代行列と解釈できること，(iii) 図Ｃは，座標系とは異なる２つの直線があり，それぞれの直線上の点をその直線上の点に移動しているので，その変換行列は対角行列や対称行列ではないものと解釈できること，(iv) 図Ｄは全ての点が一つの直線上の点に移動しているので，その変換行列はランクが１の行列と解釈できること，

以上をもとに，各グラフに対する関数を以下のように予測できる．[予測１] 図Ａの表現行列は，各点を x 軸方向に 2 陪，y 方向に 3 倍した点に移す対角行列であることから (6) である．[予測２] 図Ｂの表現行列は，点 (0,1) が点 (1,3) に移動していることから (7) である．[予測３] 図Ｃの表現行列は，点 (0,1) が点 (1,3) に移動していることから (7) である．$y = f_3(x)$ のグラフは偶関数のグラフであることと，周期 π ととれることから，関数 (F) $y = \cos 2x + \cos 4x$ のグラフである．[予測４] $y = f_4(x)$ のグラフは奇関数でも偶関数でもなく，単振動でもなく，さらに $f(\pi/2) = 0$ ととれることから，関数 (D) $\sin ax + \cos x$ のグラフである．

以上の研究をもとに，これから，
基礎数学，線形代数，微分積分，微分方程式，確率・統計
に関する，より多くの
「解釈，分析，予測を趣旨とする例題」作りの
作業に入ることとしている．