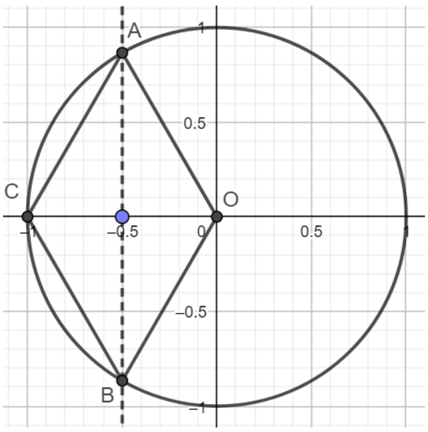
第21回福井グラフ電卓研究会(2021.11.20)

x^n-1の因数分解

生涯学習数学研究所　渡辺信

1.　$x^{10}+x^5+1$の因数分解



以前、この因数分解ができた報告をこの研究会で行った。

$x^{15}-1$の因数分解を2通りの方法で行ったときに、因数分解の一意性よりx^2+x+1が因数になることを見つけた。その後、x^m+x^n+1がx^2+x+1を因数になる組（m、n）を決めることができた。結果は

(2,1),(5,1),(5,4),(8,7),(8,4),(8,1)・・・

(4,2),(7,2),(7,5),(10,8),(10,5),(10,2)・・・

その後、ソ連の高校生に対して、x^5+x^4+1の因数分解の問題が数学を楽しむ問題として出ていた。

（補足　柴田勝征さんと最後に話をしたのもこの問題であった。）

2.　$x^{105}-1$の因数分解

この問題は一時有名になったが、なぜ係数に2が出てくるのかは分からない。

$$x^{105}-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$$
$$(x^{24}-x^{23}+x^{19}-x^{18}+x^{17}-x^{16}+x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^8+x^7-x^6+x^5-x+1)(x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}$$
$$+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1)$$

グラフ電卓を使い始めて、xn-1の因数分解をｎ＝１から順番に見ていくと、おもしろい結果が出てくると教えてもらったのは、阪神淡路大震災の前の日、村上温夫先生からであった。村上先生はその晩、最終の新幹線で神戸に変えられ、翌日朝早く地震に見舞われた。何が面白いことがあるのかは村上先生からは直接聞かなかったので、まだ不思議なことがあるのかもしれない。105までの係数に2は現れず、初めて出てくる。次は210＝2×105で、$x^{105}+1$も係数が2になる。なぜ、係数に2が出てくるのかわからない。電卓でボタンを押しと因数分解され結果が示される。

3.　x^n-1の因数分解の分類

(1) すべてのｎに対して(x-1)を因数に持つ・・・因数定理により明らか

(2) ｎ＝ｐ素数のとき・・・$x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

(3) ｎがｍの倍数のとき(x^m-1)を因数に持つ・・・x^m＝Ｘとおく

(4) ｎ=p^m、pが素数・・$x^{p^m}-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)(x^{p\cdot(p-1)}+x^{p\cdot(p-2)}+\ldots+1)\ldots(x^{p^{(m-1)}\cdot(p-1)}+x^{p^{(m-1)}\cdot(p-2)}+\ldots+1)$

$x^{16}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$…p=2,m=4

$x^{81}-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^{18}+x^9+1)(x^{54}+x^{27}+1)$ …p=3,m=4

$x^{125}-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)(x^{100}+x^{75}+x^{50}+x^{25}+1)$ …p=5,m=3

(5) ｎが３つの素数の積のとき（ｎ=3×5×7など）

4.　この問題を解こうとしたこと

ｎについてはまだ考えなくてはならないことがいろいろありそうではあるが、その方向を見失った感じがする。そこで問題を解くこととはどのような活動なのかを、今回の因数分解の分類問題の過程を振り返ってみたい。

(1) x^n-1の因数分解の中に隠れている事柄を探そうとした出発点

神戸の地震の前日の村上先生の言葉『x^n-1の因数分解は不思議・・・』は気にはなっていたが、この不思議ということが僕を動かす力にはならなかった。村上先生は『ｎ=105のとき係数に2が現れる』という結果は知っていたかもしれないが、解決できてはいなかったのではないか。解決ができていないことを他の人に伝えることには迫力がない。しかし、分からないことがあるという示唆を得た。この問題についてはその後何も研究について聞かなかった。

x^{15}-1の因数分解を2通りの方法で行ったことから、$x^{10}+x^5+1$の因数分解ができることに気がついた。この問題『$x^{10}+x^5+1$の因数分解をする』ことは与えられた問題ではなく、自分自身で気がついた問題であった。この問題は『$x^{2n}+x^n+1$の因数分解できるｎの値を探す』問題へと変化して何回となく現れてきていた。

(2) 福井グラフ電卓研究会の開催のお知らせを見たとき

井上先生からこの会の連絡を受けたときに、なぜか柴田先生の姿が浮かんできた。初めてこの会で『$x^{10}+x^5+1$の因数分解をする』について話をしたとき、彼から質問があった。僕自身得意になって話し始めたときに無理数の範囲ならば簡単であることを示された。この問題は僕の中では解決済みなので終わった問題であった。

その後、話をする内容について、なかなか決まらなかったために少々苦しんだが、柴田先生に促されて『x^n-11の因数分解』と決めた。題だけ決めてしまって内容が伴わないことで苦労した。

(3) Technologyの会でるならばTechnology活用を

長いこと何もしなかったx^n-1の因数分解をTI-89を用いてｎ=5から順番に計算してもらった。使った機能はただ一つであり、記録には困った。

factor(x^t－１，x)| t =5　　　　　$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

何かが起こることを期待してｔの値を順に増やして結果を見た。この作業を延々と続けた。何が続ける原動力になったのかは、発表の申し込みをしたことで話をしなくてはいけないということであったかもしれない。

(4) この作業の終わり

t=105 のときに、係数に 2 が現れた。村上先生が言われていたことは何かは分からないが、この結果は意外なことであった。係数は±1 のみであったのに、$x^{105}-1$ で初めて 2 が出てくる。

$$x^{105}-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$$
$$(x^{24}-x^{23}+x^{19}-x^{18}+x^{17}-x^{16}+x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^8+x^7-x^6+x^5-x+1)(x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}$$
$$+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1)$$

ｔ=210の結果が出てくるまでの数秒間は長かった。予想は係数に2が出てくると思いながら結果を待った。結果が出たがその時には当然2が現れたが、なぜかという疑問にいかに答えるかわからないこと、僕自身では説明ができないことにもわかっていた。

(5) この長い作業で何を話題にするのか

105=3×5×7は方向性を示唆していた。

予想を立てるために結果を眺める（帰納的な方法）

具体的な結果を眺めてその規則の一般化を考える

一般化されたと思われることの正しさを確かめる（帰納的に値を入れる）

式の証明をする（演繹的思考）

(6) 分かったことをまとめる

(7) 発展させるために方向を探る

5.　何もわからなかった

今回の発表では何もわからなかったという報告で、何も解決できていないことは発表にならない。そこでこの発表をする経過報告によって、問題を作りだし、その問題を解くとはどのような活動なのかの明らかにしたい。帰納的な思考の重要性を強調したい。