令和４年　６月１８日　グラフ電卓研究会

「３次方程式の解の判別と微分幾何」

福井工業高等専門学校
柳原祐治

○「２次方程式」の、解の判別

２次方程式

$$x^2 + ax + b = 0 \,(\, a \fallingdotseq 0 \,)$$

の解を、α, β とする。判別式は

$$D = (\alpha - \beta)^2$$ ←α, β の対称式！

であり、

$D \geqq 0 \iff$ 実数解のみをもつ(重解も含め、２つの実数解をもつ)。

$D < 0 \iff$ ２つの異なる虚数解をもつ。

一方で、「解と係数の関係」より

$$\alpha + \beta = -a\,, \quad \alpha\beta = b$$

なので、

$$D = \boxed{a^2 - 4b}$$ ←係数で表すことができる！

○「３次方程式」の、解の判別

３次方程式

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

の解を、α, β, γ とする。判別式は

$$D = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$$ ←α, β, γ の対称式！

であり、

$D \geqq 0 \iff$ 実数解のみをもつ(重解も含め、３つの実数解をもつ)。

$D < 0 \iff$ １つの実数解と，２つの異なる虚数解をもつ。

一方で、「解と係数の関係」より

$$\alpha + \beta + \gamma = -A, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \beta\gamma = B, \quad \alpha\beta\gamma = C$$

なので、

$$D = \boxed{-4B^3 + A^2B^2 - 4A^3C + 18ABC - 27C^2}$$ ←ややこしい！

2．今回の結果

３次方程式

$$ax^3 - x^2 + bx - c = 0 \quad (a \fallingdotseq 0) \cdots \mathrm{A}$$

が、実数解のみをもつ必要十分条件は

$$ab \leqq \frac{1}{3}, \quad L(a, b) \leqq c \leqq M(a, b)$$

ここで，$L(a, b)$ と $M(a, b)$ はそれぞれ

$$L(a, b) = \frac{1}{9a^2}\left\{ \frac{2}{3}(1-3ab)\left(-1-\sqrt{1-3ab}\right) + ab \right\}$$

$$M(a, b) = \frac{1}{9a^2}\left\{ \frac{2}{3}(1-3ab)\left(-1+\sqrt{1-3ab}\right) + ab \right\}$$

さらに。。。a, b の値に依らず，次の等式が成り立つ；

$$\frac{\partial^2 M}{\partial a^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial b^2}(a, b) = \left(\frac{\partial^2 M}{\partial a \partial b}(a, b) \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial b^2}(a, b) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial a \partial b}(a, b) \right)^2$$

つまり。。。$M = M(a, b)$ と $L = L(a, b)$ のヘッシアン

$$\begin{vmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{vmatrix} = M_{aa} \cdot M_{bb} - (M_{ab})^2, \quad \begin{vmatrix} L_{aa} & L_{ab} \\ L_{ba} & L_{bb} \end{vmatrix} = L_{aa} \cdot L_{bb} - (L_{ab})^2$$

が、常に０！

3．証明

$$ax^3 - x^2 + bx - c = 0 \cdots \mathrm{A} \text{ より}$$

$$ax^3 - x^2 + bx = c$$

左辺を $f(x)$ とすると、Aの実数解の個数は、

「$y = f(x)$ のグラフ」と「直線 $y = c$」の、共有点の個数

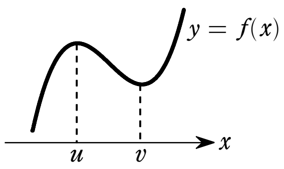
と等しい。

２次方程式 $f'(x) = 3ax^2 - 2x + b = 0 \cdots$① の判別式は

$$D/4 = (-1)^2 - 3a \cdot b = 1 - 3ab \quad \cdots ②$$

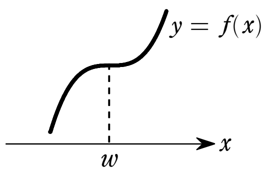
<u>$a > 0$ のとき</u>

(i) $ab < \frac{1}{3}$（② > 0）　(ii) $ab = \frac{1}{3}$（② $= 0$）　(iii) $ab > \frac{1}{3}$（② < 0）



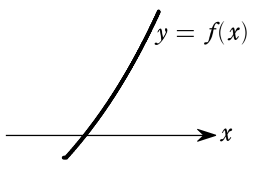
（u, v は①の実数解）

$f(v) \leqq c \leqq f(u)$



（$w = 1/3a$ は①の重解）

$f(w) = c$



① を解くと、$u = \dfrac{1-\sqrt{1-3ab}}{3a}$, $v = \dfrac{1+\sqrt{1-3ab}}{3a}$ であり，

$$f(u)=\frac{1}{9a^2}\left\{\frac{2}{3}(1-3ab)(-1+\sqrt{1-3ab})+ab\right\}\leftarrow M(a,b)$$

$$f(v)=\frac{1}{9a^2}\left\{\frac{2}{3}(1-3ab)(-1-\sqrt{1-3ab})+ab\right\}\leftarrow L(a,b)$$

よって、$\underline{\underline{a>0\text{ のとき}}}$

A が実数解のみを持つ $\iff$ $ab\leqq\frac{1}{3}$, $L(a,b)\leqq c\leqq M(a,b)$

また、$(a,b)\longmapsto(-a,-b)$ と変換しても、右辺の条件は不変！

よって、$\underline{\underline{a<0\text{ のとき}}}$も成立。

次に、$M(a,b)$ と $L(a,b)$ の第 2 次までの偏導関数を、実際に計算して求めると、

$$\frac{\partial M}{\partial a}=-\frac{1}{27a^3}\left\{4(1-3ab)^{\frac{3}{2}}+9ab\sqrt{1-3ab}+9ab-4\right\},$$

$$\frac{\partial M}{\partial b}=\frac{1}{3a}\{1-\sqrt{1-3ab}\},$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial a^2}=\frac{4(3ab-2)\sqrt{1-3ab}+9a^2b^2-24ab+8}{18a^4\sqrt{1-3ab}},\quad \frac{\partial^2 M}{\partial b^2}=\frac{1}{2\sqrt{1-3ab}},$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial a\partial b}=-\frac{2\sqrt{1-3ab}+3ab-2}{6a^2\sqrt{1-3ab}},$$

よって

$$\frac{\partial^2 M}{\partial a^2}\times\frac{\partial^2 M}{\partial b^2}=\frac{4(3ab-2)\sqrt{1-3ab}+9a^2b^2-24ab+8}{36a^4(1-3ab)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 M}{\partial a\partial b}\right)^2=\frac{4(1-3ab)+4\sqrt{1-3ab}(3ab-2)+(3ab-2)^2}{36a^4(1-3ab)}$$

$$=\frac{4-12ab+4\sqrt{1-3ab}(3ab-2)+9a^2b^2-12ab+4}{36a^4(1-3ab)}$$

$$=\frac{4(3ab-2)\sqrt{1-3ab}+9a^2b^2-24ab+8}{36a^4(1-3ab)}$$

となり、$\frac{\partial^2 M}{\partial a^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial b^2}(a,b)=\left(\frac{\partial^2 M}{\partial a\partial b}(a,b)\right)^2$ が成立。

また、

$$\frac{\partial L}{\partial a}=\frac{1}{27a^3}\left\{4(1-3ab)^{\frac{3}{2}}+9ab\sqrt{1-3ab}-9ab+4\right\},$$

$$\frac{\partial L}{\partial b}=\frac{1}{3a}\{1+\sqrt{1-3ab}\},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a^2}=\frac{4(3ab-2)\sqrt{1-3ab}-9a^2b^2+24ab-8}{18a^4\sqrt{1-3ab}},\quad \frac{\partial^2 L}{\partial b^2}=-\frac{1}{2\sqrt{1-3ab}},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a\partial b}=-\frac{2\sqrt{1-3ab}-3ab+2}{6a^2\sqrt{1-3ab}}$$

から、$\frac{\partial^2 L}{\partial a^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial b^2}(a,b)=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial a\partial b}(a,b)\right)^2$ が成立。

４．２つの曲面 $S_M : z = M(x, y)$，$S_L : z = L(x, y)$ の性質

曲面 S_M 上の点 $(a, b, M(a, b))$ におけるガウス曲率 $K_M(a, b)$ は

$$K_M(a, b) = \frac{M_{xx}(a, b)M_{yy}(a, b) - (M_{xy}(a, b))^2}{(M_x(a, b)^2 + M_y(a, b)^2 + 1)^2}$$

よって。。。

$$K_M = 0 \quad \text{同様に} \quad K_L = 0$$

従って。。。

２つの曲面 S_M, S_L は，いずれも可展面！

（線織面の一種であり、 直線の集合から構成されている！）

一般に。。。空間内の可展面は、次の４種類のどれかである；

(1) 平面　(2) 柱面　(3) 錐面　(4) 接線曲面

S_M と S_L は、実際の形をみると(1)～(3)のいずれでもない。従って、(4)の接線曲面である！つまり、何らかの曲線上の接線を、曲線に沿って動かしたときにできる曲面である。

５．さいごに

代数的な条件(代数方程式の解を、判別すること)

から、

解析的に著しい結果(微分幾何学的に特徴的な曲面が、定義される)

がでてくる！

＜参考文献＞

柳原祐治，３次方程式の解の判別条件とその解析的な性質，日本数学教育学会高専･大学部会論文誌 28(1)1－10 2022年4月