

工学数学教育において 数理モデルを作るための 教材の開発研究

松田 修（津山高専）

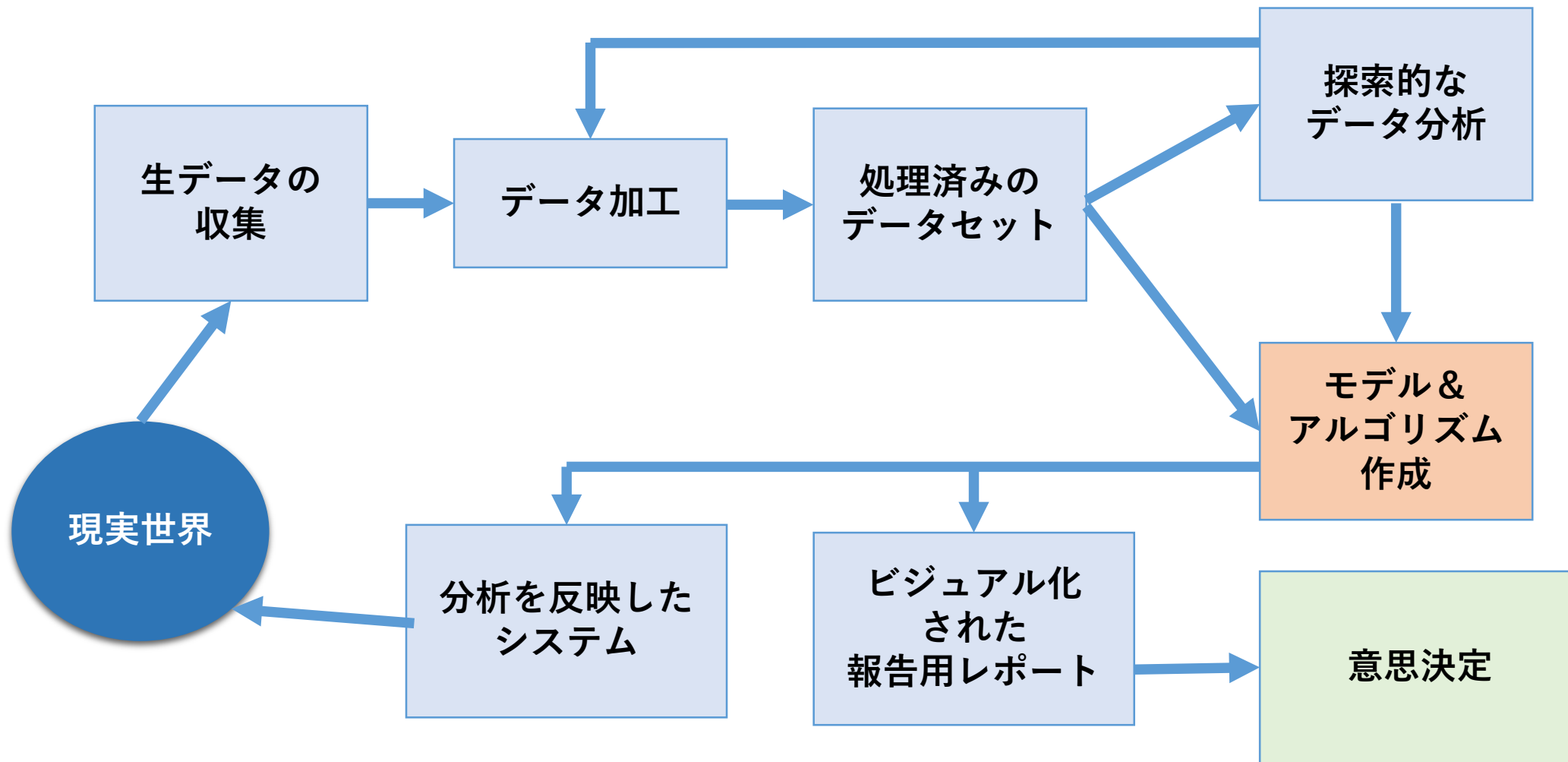
データサイエンス

この3年間、科研費を使って、

「数理・データサイエンス教育のためのデータ分析を
訓練する数学教材の開発」

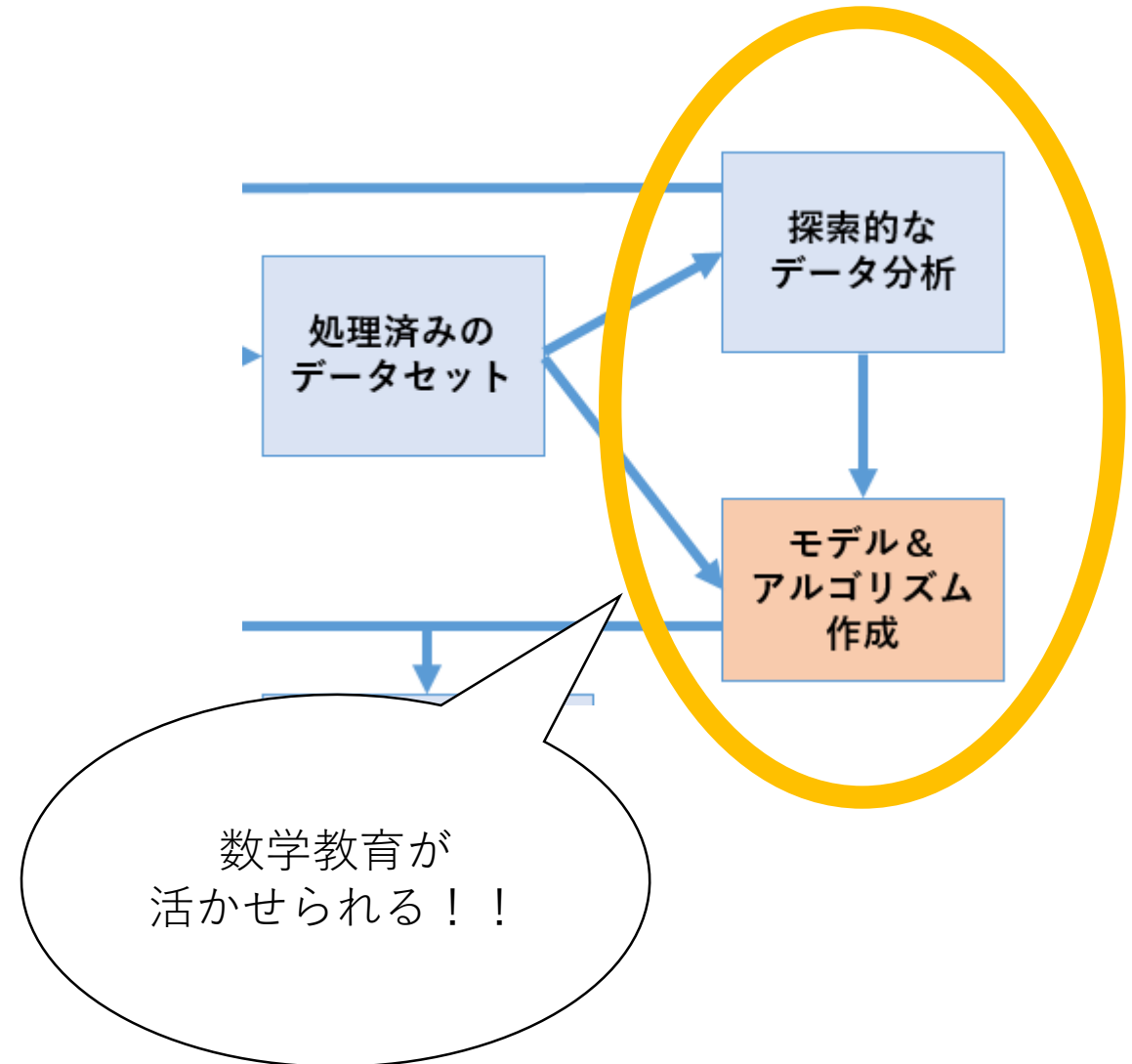
を行ってきた。

データサイエンスのプロセス



問い「データサイエンスのプロセスにおいて、
数学教育でできることは何か？」

1. 処理済み（整理された）
データを，分析する教材
2. モデルを考える教材



テーマ

数理・データサイエンスを,

単に教えるのではなく,

どのような方法で, その核となる数学を,

体験させられるか?

データ分析に関連する数学教材

- 確率・統計
- 数列（漸化式）
- 微分方程式
- 行列
- フーリエ変換

【統計の教材】

- ・ [光量子仮説と光電効果とプランク定数の測定](#) 2022.6.01_matsuda
- ・ [マルコフ連鎖の推移](#) 2022.4.30_matsuda
- ・ [グラフとマルコフ連鎖](#) 2022.4.30_matsuda
- ・ [ロケットの状態空間モデル](#) 2021.3.24_matsuda
- ・ [ガンマ分布とベータ分布](#) 2021.3.23_matsuda
- ・ [マルコフ連鎖](#) 2021.3.23_matsuda
- ・ [最尤度推定量と混合ガウス分布](#) 2021.3.19_matsuda
- ・ [流れ星の観測待ち時間の推定](#) 2021.3.19_matsuda
- ・ [流れ星の出現とポアソン分布](#) 2021.3.17_matsuda
- ・ [ガンマ関数とベータ関数](#) 2021.2.4_matsuda
- ・ [ポアソン分布を理解する](#) 2021.2.3_matsuda
- ・ [ベイズ推定（基本編）](#) 2021.2.1_matsuda
- ・ [人気投票とベキ関数](#) 2019.7.31_matsuda
- ・ [パレート分布と地震](#) 2019.7.31_matsuda
- ・ [パレート分布と伝送遅延RTT](#) 2019.7.31_matsuda

【微分積分の教材】

- ・ [シュレディンガー方程式](#) 2022.6.02_matsuda
- ・ [1次元調和振動子と古典的ハミルトニアン](#) 2022.5.19_matsuda
- ・ [ラグランジュの運動方程式](#) 2022.5.17_matsuda
- ・ [血糖値モデル](#) 2022.5.13_matsuda
- ・ [連成振動モデル](#) 2022.5.13_matsuda
- ・ [ミカエリス・メンテンモデル](#) 2022.5.6_matsuda
- ・ [広告の反応モデル](#) 2022.4.29_matsuda
- ・ [消費者行動の数理モデル](#) 2022.4.22_matsuda
- ・ [連立微分方程式のベクトル場の理解](#) 2019.7.23_matsuda
- ・ [微分の理解](#) 2019.7.23_matsuda
- ・ [薬の吸収速度の推定 1, 薬の吸収速度の推定 2](#) 2019.7.8_matsuda

- ・ [最小二乗法](#) 2021.4.04_matsuda
- ・ [マハラノビス距離と2次曲線](#) 2020.2.22_saito
- ・ [アインシュタインの時空](#) 2021.2.18_matsuda
- ・ [ファジー線形計画法1](#) 2019.9.24_matsuda
- ・ [線形計画法2](#) 2019.9.20_matsuda
- ・ [線形計画法1](#) 2019.9.20_matsuda

【基礎数学&教養数学の教材】

- ・ [閉曲面のオイラー数](#) 2022.6.08_matsuda
- ・ [平面図形のオイラー数](#) 2022.6.06_matsuda
- ・ [ハッセ図を作ろう](#) 2022.5.25_matsuda
- ・ [RSA暗号](#) 2021.2.18_matsuda
- ・ [指数関数と対数関数とバクテリアの個数の推定](#) 2019.5.29_matsuda
- ・ [合成コサインカーブの特徴をつかむ,](#) [合成サインカーブの特徴をつかむ](#) 2019.5.29_matsuda

関連資料

- ・ [「べき分布」：関連リンク集](#) 2019.9.24 umeno
- ・ [マハラノビスの距離入門](#) 2020.2.22 saito

意見

- ・ [「べき分布（パレート分布）」について](#) 2019.7.15 umeno

その他

- ・ [総合理工演習の試験問題](#) 2019.7.31_matsuda

第2回会議（2021年5月のWEB会議資料）

資料 ・ [松田](#) , ・ [斎藤](#) ・ [長水](#) ・ [前澤](#) ・ [梅野1](#) ・ [梅野2](#)

第1回会議（2019年5月18日，倉敷市民会館第5会議室）

資料 ・ [松田1](#) , [松田2](#) ・ [長水](#) ・ [中村](#) ・ [前澤](#) ・ [相場](#) ・ [梅野](#)

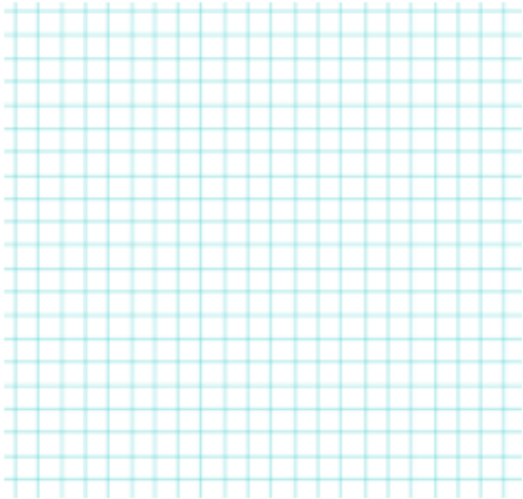
パレートの法則：マーケティングにおいて「2：8の法則」とも呼ばれ、顧客全体の2割である優良顧客が全体の売り上げの8割をあげているという法則。

問題 1. ある年、女性タレント 320 人の人気投票が行なわれた。得票総数は 3,260,000 票で、上位の得票率のサンプルデータは以下である。

順位 x	1	20	40	60	80
タレント	RS	AT	MF	KK	AM
得票率 P	0.0745	0.0102	0.0071	0.0051	0.0040
べき関数値 y					
誤差 $ P - y $					

パレートの法則が
適応できるかどうか
考えさせる。

(1) データ (x, P) を下の方眼になるべく正確にプロットし、近似曲線を描け。



- (2) (x, P) は、べき関数 $y = \frac{c}{x^k}$ に従うと考え、誤差 $|p - y| < 0.06$ となるように、 c と k を決定し、 y の欄と、誤差 $|p - y|$ の欄を埋めよ。
- (3) $y = \frac{c}{x^k}$ に従う分布は (x, P) 、パレート分布 $\text{Par}(a, b)$ でないことを示せ。
- (4) (2) から得られた関数 $y = \frac{c}{x^k}$ が確率密度関数となるための x の範囲を決定せよ。
- (5) (x, P) を確率密度関数 $y = \frac{c}{x^k}$ から得られる分布と考え、次を小数第 3 位まで計算せよ。
 $P(0.5 \leq X \leq 1.5), \quad P(1.5 \leq X \leq 2.5)$
- (6) $y = \frac{c}{x^k}$ の平均 μ を求めよ。

2. ポアソン分布のベイズ推定

扱う統計の母集団がポアソン分布と考えられる場合にベイズ推定を行うときは、仮に λ をその母集団の平均出現回数とし、尤度を

$$f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

とする。ここで、 x は1回の観測で、ある事象が起こる回数である。したがって、確率分布に関するベイズの定理より

$$f(\lambda|x) = \frac{f(x|\lambda)f(\lambda)}{\int_0^\infty f(x|\lambda)f(\lambda)dx}$$

ポアソン分布の
積分バージョン
ガンマ分布の
体験

3. ポアソン分布の共役事前分布であるガンマ分布について

母集団がポアソン分布 $P_0(\lambda)$ に従っているとする。そして事前分布をガンマ分布 $Ga(a,b)$ とする。このとき、事後分布もガンマ分布となる。このことを説明する。

ポアソン分布 $P_0(\lambda)$ の事前分布をガンマ分布 $Ga(a,b)$ とする。このとき、事後パラメータが n 個のデータであるときの事後分布は、ガンマ分布 $Ga(a + \sum x_i, b + n)$ とできる。すなわち、ポアソン分布の事前分布であるガンマ分布は、共役事前分布である。したがって 事後分布の平均と分散を

$$E[\lambda] = \frac{a + \sum x_i}{b + n}, \quad V[\lambda] = \frac{a + \sum x_i}{(b + n)^2}$$

と考えることができる。

ポアソン分布を理解する

1. ポアソン分布の使い方

ポアソン分布 $P_0(\lambda)$ は、求めたい事象の発生確率 p が非常に小さくて、統計量 n を十分大きくとったとき、 $np = \lambda$ （一定）で、 $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ が成り立つときに利用できる分布である。より具体的には、単位時間当たりに平均 λ 回起こる事象において、その事象が単位時間に k 回起こる確率を求めるときに利用できる。

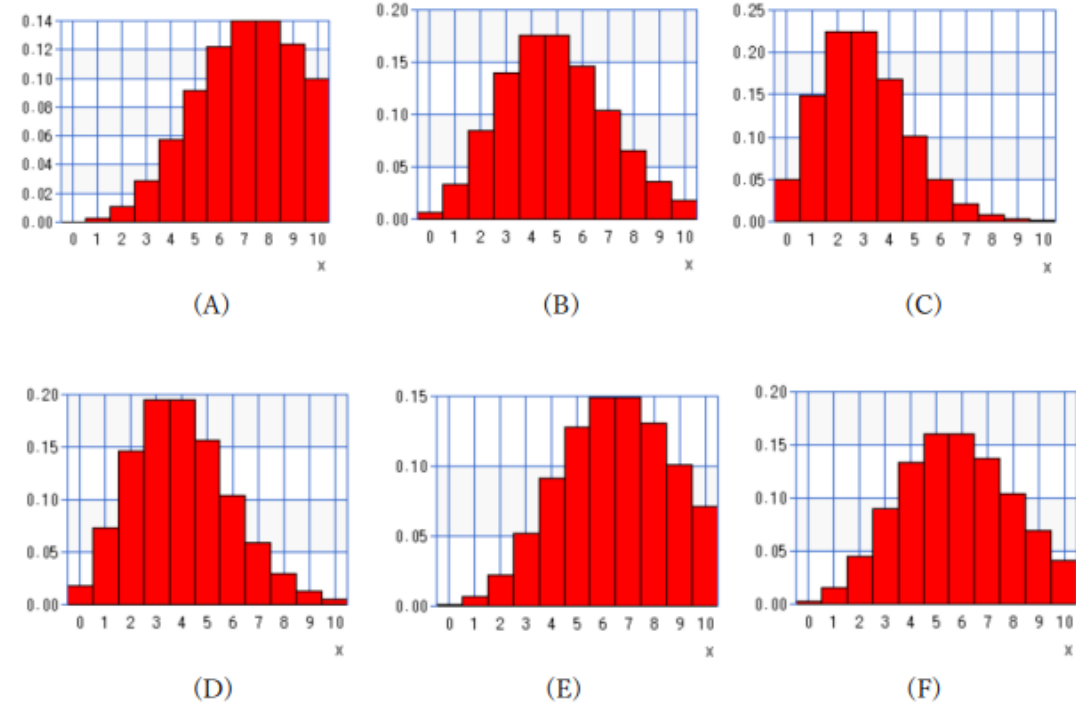
1. 定数 λ の設定： $\lambda = np$

2. ポアソン分布 $P_0(\lambda)$ の確率密度関数 $f(k|\lambda)$

$$f(k|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

3. ポアソン分布 $P_0(\lambda)$ の平均 $E[X]$ と分散 $V[X]$

$$E[X] = \lambda, \quad V[X] = \lambda$$



【問題1】Mさんのもとには、1時間当たりに平均6通のメールが届く。終業時間残り30分の間に1通もメールが届かない確率を求めよ。

【問題2】ある流れ星の観測で、5分間に平均0.8個の流れ星を観測した。10分間の観測で流れ星が1個以上発生する確率を求めよ。

【問題3】1ℓ中のある菌の数が1500個である液体から1mlをとって培養したとき、コロニー数が3個以上である確率を求めよ。

ポアソンの使えるものを体感させる、
グラフを体感させる。

流れ星の出現とベイズ推定

1. 流れ星の出現とポアソン分布

以下の表は流れ星の5分ごとの観測データである.

表 1 (流れ星のデータ)

n 回目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
個 数 (x_n)	1	0	0	2	0	1	3	0	1	0

統計学的にあるデータがポアソン分布に従うための3つの条件があり, それは以下である.

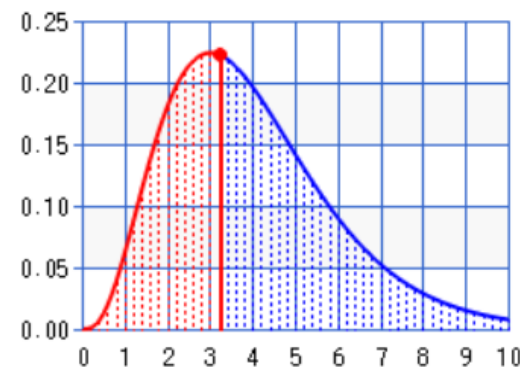
- (条件1) 希少性がある. すなわち同じタイミングで2個以上起こらない.
- (条件2) 独立性がある. 今事象が起こったことは, それ以前の事象が起こったことに依存しない.
- (条件3) 定常性がある. 単位時間内にある事象が起こる確率は常に一定である.

総合問題. 以下の表は流れ星の5分ごとの観測データである. ただし, 尤度はポアソン分布 $P_0(\lambda)$ に従うと仮定する.

表2 (流れ星のデータ)

n 回目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
個 数 (x_n)	2	0	2	1	0	3	4	2	1	1

- (1) 再尤度推定による λ を求めよ.
- (2) 再尤度推定による λ から流れ星が発生する確率を小数点以下第3位まで求めよ.
- (3) 事前分布をガンマ分布 $Ga(4,1)$ としたときの事後分布 $Ga(a',b')$ の a',b' を求めよ.
- (4) 事前分布をガンマ分布 $Ga(4,1)$ としたときの λ のEPA推定値 λ_{epa} を小数点以下第3位まで求めよ.
- (5) 事前分布をガンマ分布 $Ga(4,1)$ としたときの λ のMAP推定値 λ_{map} を小数点以下第3位まで求めよ.
- (6) 確率 $p(\lambda_{map} - 0.05 \leq \lambda \leq \lambda_{map} + 0.05)$ を小数点以下第3位まで求めよ.



ガンマ関数という
新しい武器を
体験させる.

マルコフ連鎖

1. マルコフ連鎖

マルコフ連鎖とは、確率変数の列 $\{X_t\}$ について、 X_{t+1} が X_t にのみに依存して得られる式

$$p(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \dots, X_1) = p(X_{t+1}|X_t)$$

を満たす $\{X_t\}$ のことである。

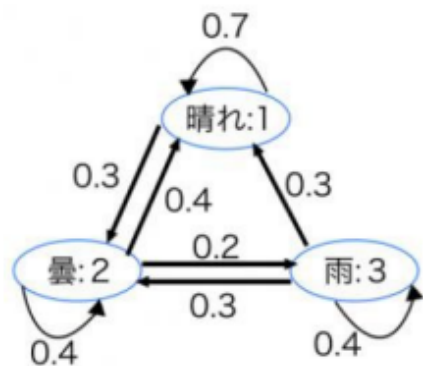
X_t がとりうる値の集合を状態空間という。例えば、 $S=\{\text{晴れ}, \text{曇り}, \text{雨}\}$ は、状態空間である。

$p(X_{t+1}|X_t)$ を 推移確率（または 遷移確率）という 例えば、「今日曇りであるとき、明日晴れになる確率は 0.3 である」というときは、

$$p(X_{t+1} = \text{晴れ} | X_t = \text{曇り}) = 0.3$$

となる。

状態空間を頂点で表し、推移確率を枝で表したグラフを状態推移図という。



状態推移図を表に表すと、以下のようになる。

前 \ 後	晴れ	曇	雨
晴れ	0.7	0.3	0
曇	0.4	0.4	0.2
雨	0.3	0.3	0.4

上の表を行列にしたもの

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

を推移確率行列という。

数列ではなく、
行列で推測する方法
を体験させる。

問題 1. 上の天気に関する推移確率行列 P を用いて、今日雨であったとき、2 日後に晴れである確率を求めよ。

2. チャップマン-コルモゴロフ方程式

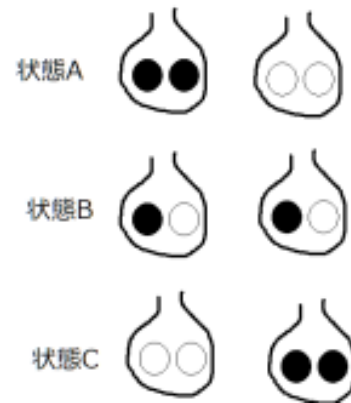
例えば、袋1と袋2があって、その中には2個ずつ計4個の玉が入っている。このうち、2個は黒玉、2個は白玉とする、この状態空間は、

状態 A: 袋1が2個とも黒玉、袋2は2個とも白玉

状態 B: 袋1も袋2も黒玉と白玉が1個ずつ

状態 C: 袋1が2個とも白玉、袋2は2個とも黒玉

である。



チャップマン-コルモゴロフ方程式である。

$$p^{(n+m)} = p^{(n)} p^{(m)}$$

マルコフ過程と
行列の関係を
体験させる。

問題3. 問題2の推移確率行列 P について $P^{(\infty)}$ を求めよ。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2019 年 9 月 24 日
 提案者：松田 修

問題. 某会社では、製品XとYを生産している。そして、これらを生産するには 3 種類 A,B,C の資源を必要とする。これらの製品XとYを1kg生産するための資源 A,B,C の必要量と、今年のそれらの資源の調達可能量は以下の通りである。

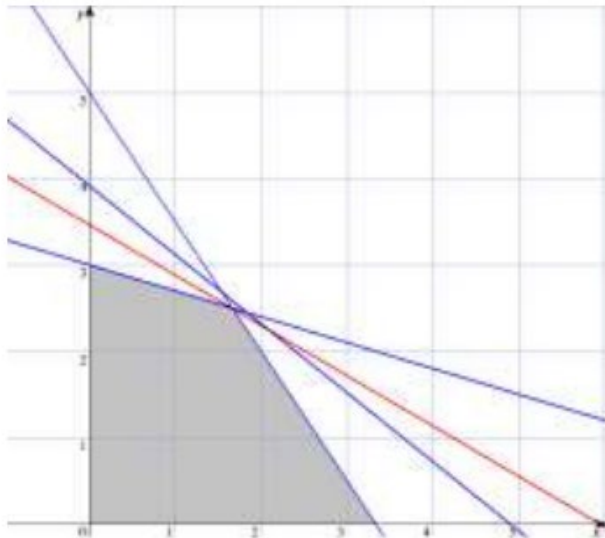
資源	X	Y	現在の調達可能量
A	4	5	検討中
B	6	4	20,000
C	3	10	30,000

ただし、A については過去 4 年間の調達実績量を以下に挙げる。

年	4 年前	3 年前	2 年前	1 年前
調達実績量	16,800	17,400	18,000	19,000

Xの価格は1kg辺り 0.7 千円，Yの価格は1kg辺り 1.2 千円である。 x をXの生産量， y をYの生産量としたとき，XとYを合算した生産売り上げを最大にするには，生産量 x と y をどのように計画すればよいか。

基礎数学で学習する
 連立不等式の利用を
 体験させる。



数理モデルの重要性

- 何かを分析する。
- 同時に数理モデルをたてるという思考が働く。
- 数理モデルを意識しながら分析する。
- 「相関」→ 線形方程式が立てられる。
- → しかし、単に、回帰直線を求めることで終わっていないか？
- どのような発想で、数理モデルが作れるか。
- 追体験できる数学教材を作ろう。

どの数学が利用できるかを
考えさせる教材！！

テーマ

数理モデルの追体験

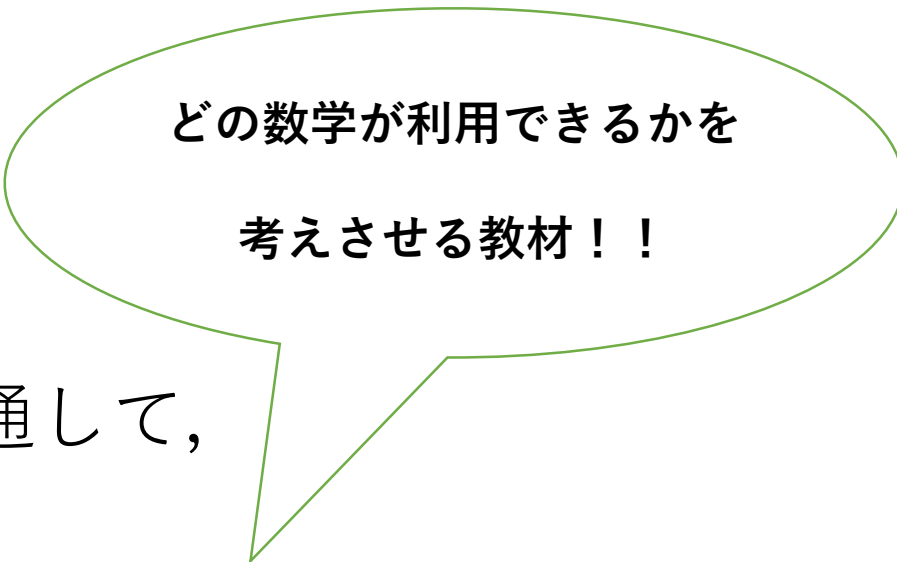
そのためには、

与えられた現実的な問題を通して、

微分方程式的な思考法を追体験させる。

行列を利用する的な思考法を追体験させる。

トポロジー的な思考法を追体験させる。



**どの数学が利用できるかを
考えさせる教材！！**

2022 年 4 月 21 日

提案者：松田 修

問題 $x(t), P(t), A(t)$ は以下のように定義されている.

$x(t)$: 時間 t における商品 X の販売個数

$P(t)$: 時間 t における商品 X の購入が希望されている個数

$A(t)$ を時間 t における商品 X の広告レベル

$x(t), P(t), A(t)$ に関して, 以下の連立微分方程式が立てられた.

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = 3(P - \alpha x), \quad (2) \quad \frac{dP}{dt} = 2(x - \beta P) + A$$

ただし, α, β は正の定数で, $\alpha\beta > 1$ とする.

Q1. 微分方程式(1)の意味を文章で説明せよ.

Q2. 微分方程式(2)の意味を文章で説明せよ.

Q3. 微分方程式(1)と(2)から $x(t)$ に関する 2 階の定数係数線形微分方程式を立てよ.

微分法方程式が
意味するものを,
自分なりにイメージさせる.

2階の微分法方程式の
必然性を
体験させる.

2022年5月6日

提案者：松田 修

物質 A と B の反応から生産物 P と Q が得られることを $aA + bB \rightarrow pP + qQ$ と書く。ここで、 a, b, p, q は各物質のモル数である。そしてこの反応速度 v は、以下のように定義される。

$$v = \frac{1}{a} \left| \frac{d[A]}{dt} \right| = \frac{1}{b} \left| \frac{d[B]}{dt} \right| = \frac{1}{p} \left| \frac{d[P]}{dt} \right| = \frac{1}{q} \left| \frac{d[Q]}{dt} \right|$$

ここで、 $[X]$ は物質 X の濃度を表す。

以下において、酵素の反応について考える。そのために、以下の記号を導入する。

E ：酵素（生体内における化学反応の触媒）

S ：基質（酵素によって化学反応を触媒される物質）

P ：反応生産物（酵素反応の結果、基質からできたもの）

ES ：酵素と基質の複合体

v_1 ： $E + S \rightarrow ES$ の反応速度、 v_{-1} ： $ES \rightarrow E + S$ の反応速度、 v_2 ： $ES \rightarrow E + P$ の反応速度

化学の酵素反応において、
なぜ、微分が使われるのか
その必然性を
体験させる。

酵素反応 $E + S \rightarrow E + P$ のミカエリス・メンテンモデル

(1) $E + S \rightleftharpoons ES \rightarrow E + P$ と2段階に分けられる。すなわち、複合体 ES は逆戻りすることもあるが、生成物 P をあたえることもできる。

(2) 各反応速度は基質の濃度に比例する。すなわち

$$v_1 = k_1[E] \cdot [S], \quad v_{-1} = k_{-1}[ES], \quad v_2 = k_2[ES]$$

である。ここで、 k_1, k_{-1}, k_2 は比例定数である。

(3) ES の生産速度と分解速度は等しい、つまり $[ES]$ は一定である。すなわち、

$$\frac{d[ES]}{dt} = 0$$

(4) E の初期濃度を $[E]_0$ とすると、 $[E]_0 = [E] + [ES]$ が成り立つ。

Q1. $\frac{d[ES]}{dt} = 0$ から v_1, v_{-1}, v_2 の関係式を導け。

Q2. $K_m = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2}$ と置いたとき、 $[ES] = \frac{[E] \cdot [S]}{K_m}$ であることを示せ。

Q3. $[E]_0 = [E] + [ES]$ を用いて、 $[ES] = \frac{[E]_0 \cdot [S]}{K_m + [S]}$ を示せ。

Q4. $V_{max} = k_2[E]_0$ と置いたとき、ミカエリス・メンテン式 $\frac{dP}{dt} = \frac{V_{max} \cdot [S]}{K_m + [S]}$ を導け。

Q5. $K_m = [S]$ となる $v = \frac{dP}{dt}$ を求めよ。

2022 年 5 月 25 日

提案者：松田 修

円と正方形と三角形の形がそれぞれ 3 個ずつあり，それらは赤，黄，青のどれかで色付けされている．そのデータが表 1 であり，○がその内容を意味する．たとえば，ラベル o1 の属性は円と黄なので，o1 は黄色の円を意味する．

表 1

ラベル	属性					
	円	正方形	三角形	赤	黄	青
o1	○				○	
o2	○			○		
o3	○					○
o4		○				○
o5		○			○	
o6		○			○	
o7			○	○		
o8			○	○		
o9			○	○		

問題 1．以下の問いに答えよ．

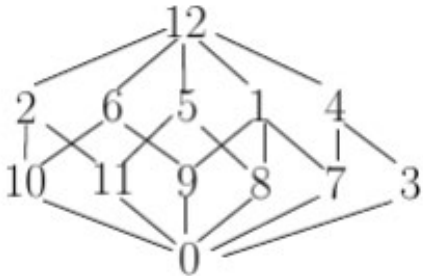
（1）表 2 の 13 種類の形式概念（内包の集合，外延の集合）について，形式概念 A の内包の集合を A_1 ，形式概念 B の内包の集合を B_1 とする．このとき， $A_1 \subset B_1$ ならば $A \geq B$ とすると， $\geq$ は順序関係であることを示せ．

（2）問 1 で定めた順序関係で表 2 の形式概念の分類番号によるハッセ図を描け．

表 2

分類番号	形式概念	
	内包の集合 {属性}	外延の集合 {ラベル}
0	{全ての属性}	{ }
1	{円}	{o1,o2,o3}
2	{正方形}	{o4,o5,o6}
3	{三角形}	{o7,o8,o9}
4	{赤}	{o2,o7,o8,o9}
5	{黄}	{o1,o5,o6}
6	{青}	{o3,o4}
7	{円, 赤}	{o1}
8	{円, 黄}	{o2}
9	{円, 青}	{o3}
10	{正方形, 赤}	
11		
12		

順序という概念と，ハッセ図という道具を体験させる．



連結というイメージ、
グラフという視覚化、
行列という計算方法、
体験させる。

1 既約行列

既約行列を定義する。

定義1 $A = (a_{ij})$ を n 次実正方行列とする。

(1) A のすべての成分 a_{ij} が $a_{ij} \geq 0$ であるとき、 A を **非負行列** という。

(2) A を非負行列とする。任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対し、 A^m の成分 a_{ij} が $a_{ij} > 0$ となるような自然数 m が存在するとき、 A は **既約** である、または **既約行列** であるという。

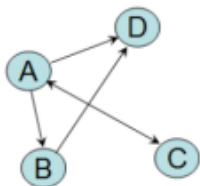
例1

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ は既約である。なぜならば、 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ となるから。

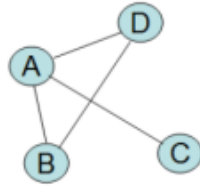
(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は既約ではない。なぜならば、 $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるから。

2 有向グラフ

グラフ (または、**無向グラフ**) とは、頂点と辺により構成された図形のこと、点をノード、辺をエッジと呼ぶ。そして、**有向グラフ** とは、向きをもつエッジにより構成されたグラフのことをさす。



(a) 有向グラフ

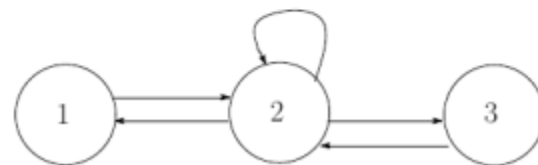


(b) 無向グラフ

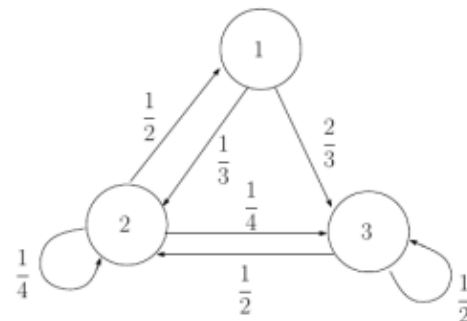
3 行列の周期

A を非負な n 次正方行列とする。そして、 A に付随する有効グラフ G_A を考える。

たとえば、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に付随する有効グラフ G_A は



問6 以下の有効グラフは、あるマルコフ連鎖の状態推移図である。矢印の近くの数値は、ある情報が単位時間あたりに各ノードから別のノードへ移る確率を意味する。以下の問いに答えよ。



(1) この推移行列 P を求めよ。

(2) P の極限分布 $P^{(\infty)}$ が存在することを示せ。

(3) $P^{(\infty)}$ を求めよ。

2022年6月2日

提案者：松田 修

1924年，フランスの物理学者ルイ・ド・ブロイは，光子のエネルギー E と運動量 p が，それぞれ $E = h\nu$ ， $p = h/\lambda$ は，電子に対しても成り立つとした．ここで， h はプランク定数， ν は振動数， λ は光の波長である．

さて，電子の運動を波（**電子波**，**ド・ブロイ波**）と考え， m を電子の質量， v を速度とすると，ニュートン力学においては，

$$E = \frac{mv^2}{2}, \quad p = mv \quad (1)$$

が成り立つので，

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu, \quad mv = \frac{h}{\lambda} \quad (2)$$

が得られる．よって，

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (3)$$

が得られる． λ を**ド・ブロイ波長**と呼ぶ．

ド・ブロイ波 ψ を複素関数と考えると，

$$\psi = Ae^{i2\pi(\frac{x}{\lambda} - \nu t)} = Ae^{i2\pi(px - Et)} \quad (4)$$

となる．ここで A は実数の定数である．これより，

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} = p\psi \quad (5)$$

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi \quad (6)$$

ここで， $\hbar = h/2\pi$ である．

量子化のやり方を
体験させる

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + V(x) \right] \psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (8)$$

が得られる．これを整理して，

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (9)$$

を得る．また， E が一定の場合は，(7)を用いて

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (10)$$

と書き直す．式(9)と(10)を**シュレディンガー方程式**，そして， ψ を**波動関数**と呼ぶ．

演習

E を定数としてシュレディンガー方程式(10)において， $V(x) \equiv 0$ とする．以下の問いに答えよ．

問1．シュレディンガー方程式(10)，すなわち，

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi$$

を解け．

問2．境界条件として $\psi(0) = 0$ とする（すなわち， $x = 0$ に壁があるとする）．このとき， $E \geq 0$ でなければならないことを証明せよ．

問3． L の正の定数とし，境界条件として $\psi(0) = \psi(L) = 0$ とする（すなわち， $x = 0$ と $x = L$ に壁があるとする）．このとき， $E = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ となることを証明せよ．ただし， n は1以上の整数である．

1905 年 ユダヤ系ドイツ人であるアルバート・アインシュタインは、振動数 ν の光（電磁波）は、エネルギー $h\nu$ の粒からなるという**光量子仮説**を提唱した（現在は、光の粒を**光子（フォトン）**と呼ばれる）。ここで h はプランク定数（ $6.62607015 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$ ）である。すなわち、光子 1 個のエネルギー ϵ は

$$\epsilon = h\nu \quad (1)$$

で与えられる。さらに、各光子は光の進行方向に向いた運動量 p をもち

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (2)$$

を示した。ここで、 $c = 299792458 \text{ m/s}$ （光速）で、 $\lambda = c/\nu$ （光の波長）である。

1923 年アメリカの物理学者ロバート・アンドリュース・ミリカンは、光電子のエネルギーと光の波長からプランク定数を求める実験を行った。

ミリカンのプランク定数を求める方法は以下である。

1. 水銀灯の紫外域及び可視光のスペクトル線から単色光を取り出し、それを真空中に置かれたナトリウム、リチウムの切削直後の金属表面に照射する。
2. 光電子面に対して、電子を受ける電極に加える逆電位 $-V$ を変えていき、光電子の流れを測定する。
3. もし光電子の運動エネルギー E_k が $eV > E_k$ ならば光電子は電極に到達できないので

光電子は流れない。ここで、 e は**素電荷**（電電子 1 個がもつ電気量）といい、 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ [C]}$ である。（* e の値を求めるものとして、「ミリカンの油滴実験」が有名である。）

4. 電流がちょうど流れなくなる逆電圧を V_0 （**阻止電圧**という）とすると、 $E_k = eV_0$ となる。

5. したがって、アインシュタインの光電効果に関する仮説から、

$$eV_0 = h\nu - W \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e} \quad (4)$$

となる。

6. いろいろな ν とそれに対する V_0 のデータ(ν, V_0)から h が推定できる。

回帰直線の考え方を体験させる。

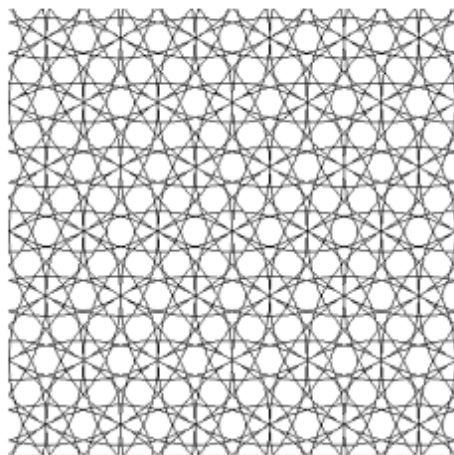
問 1. 3 種類の振動数 $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$ の単色光 A, B, C を測定したところ $\nu_A = 4.95 \times 10^{14} \text{ Hz}$, $\nu_B = 7.03 \times 10^{14} \text{ Hz}$, $\nu_C = 6.14 \times 10^{14} \text{ Hz}$ であった。これらの単色光を光子と考えた場合、光子 A, B, C の 1 個のエネルギー $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$ を比較せよ。

問 3. 問 2 において、振動数に対する阻止電圧の回帰直線 $V_0 = a\lambda + b$ の方程式を求めよ。

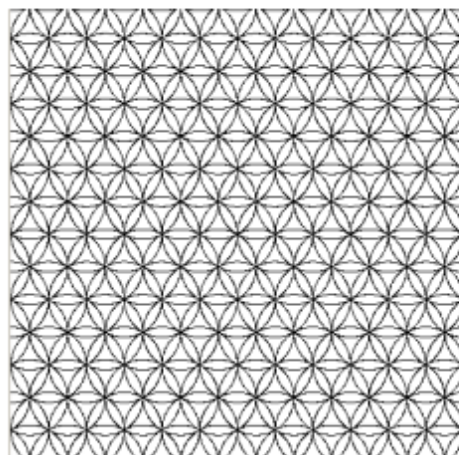
問 4. 問 3 とアインシュタインの光電効果に関する仮説を用いて、プランク定数の値 h を求めよ。ただし、 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ [C]}$ は既知する。

(ゴールとしての) 卒業研究の例 1

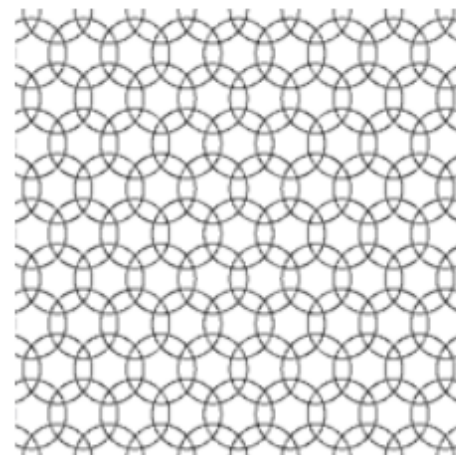
- ルーロー模様のフーリエ解析, 加田 紘大, 2021年



$R(0.5)$



$R(1.0)$



$R(1.5)$

図6 ルーロー模様 $R(d)$

私は、周期的な模様が発する光の波によって、その違いが現れているのではないかと考えた。このことから、ルーロー模様 $R(d)$ から何らかのデータを取得し、それらのデータをフーリエ解析（高専で学習した）してみればよいのではないかと考えた。では数学的には何のデータをとればよいのだろうか。

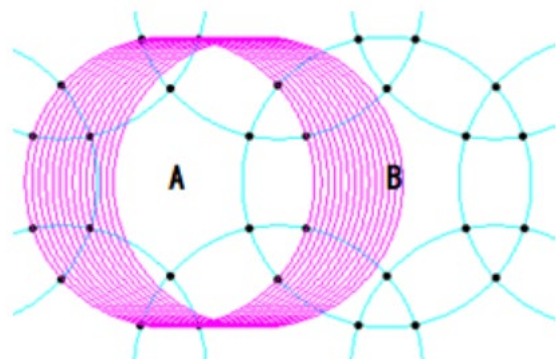


図 1 0 $R(1.5)$ 上で円領域内の交点数のデータを取得する様子

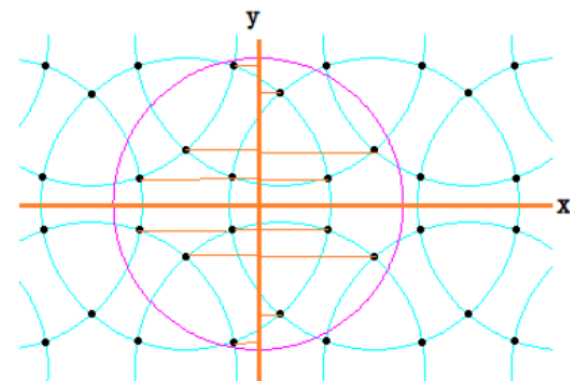


図 2 2 交点モーメント

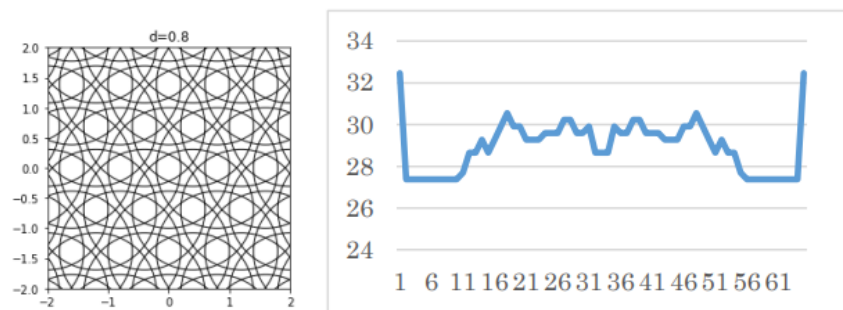


図 1 5 ルーロー模様 $R(0.80)$ と交点密度のグラフ

$R(0.83)$ の交点密度
エネルギー
 $E_{pt}(0.83) = 170.44$

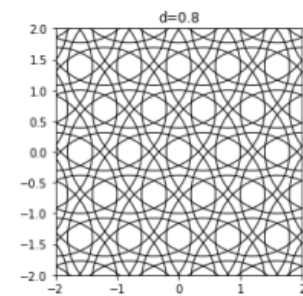


図 2 4 ルーロー模様 $R(0.80)$ と交点モーメント支配因子関数のグラフ

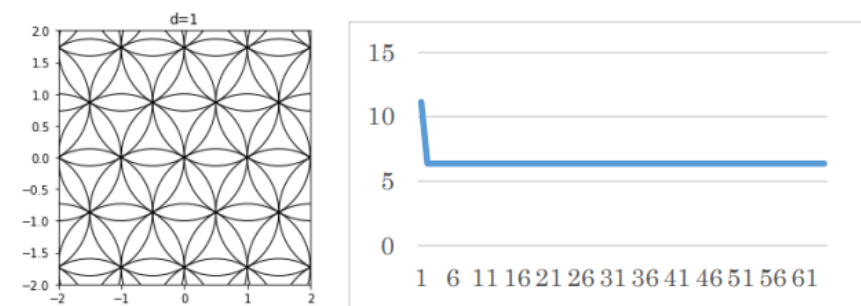
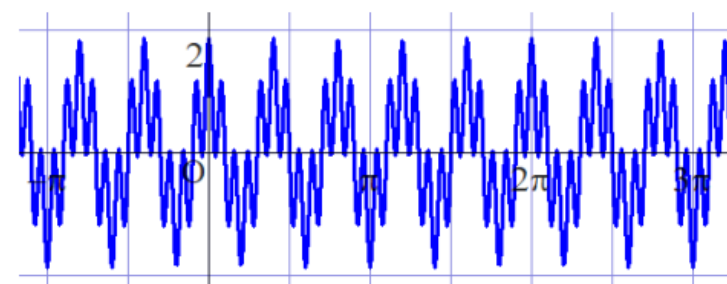


図 1 6 ルーロー模様 $R(1.00)$ と交点密度のグラフ

$R(1.00)$ の交点密度
エネルギー
 $E_{pt}(1.03) = 127.34$

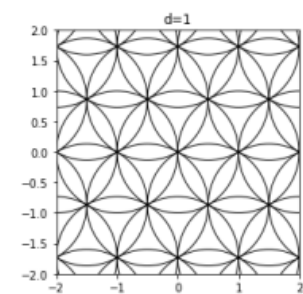
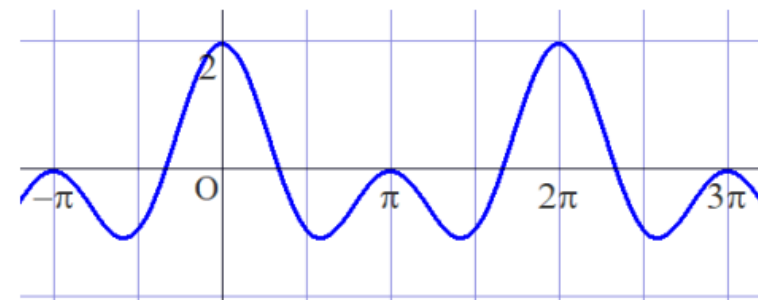


図 2 5 ルーロー模様 $R(1)$ と交点モーメント支配因子関数のグラフ



卒業研究 例 2

- 道の駅久米の里のガンダム像に対抗する 津山地下巨大水族館の建造計画, 園田朋久, 2022

概要

本研究では、「新しい津山地域の街づくりとして、一見、津山地域に関連しないと思われる水族館を構想し、デザインせよ」というミッションの達成を目指す。本水族館は岡山

本企画では、道の駅久米の里のガンダム像と、新世紀エヴァンゲリオンのジオフロントを連想する「津山地下巨大水族館」が、今後の津山市の新しいイメージとなることを目標にしている。



図1 津山道の駅久米の里のガンダム像

3 螺旋階段について

螺旋階段は直径 50m、高さ 50m の円柱を想定した。さらに、車いすなどを考慮してスロープについても考える。

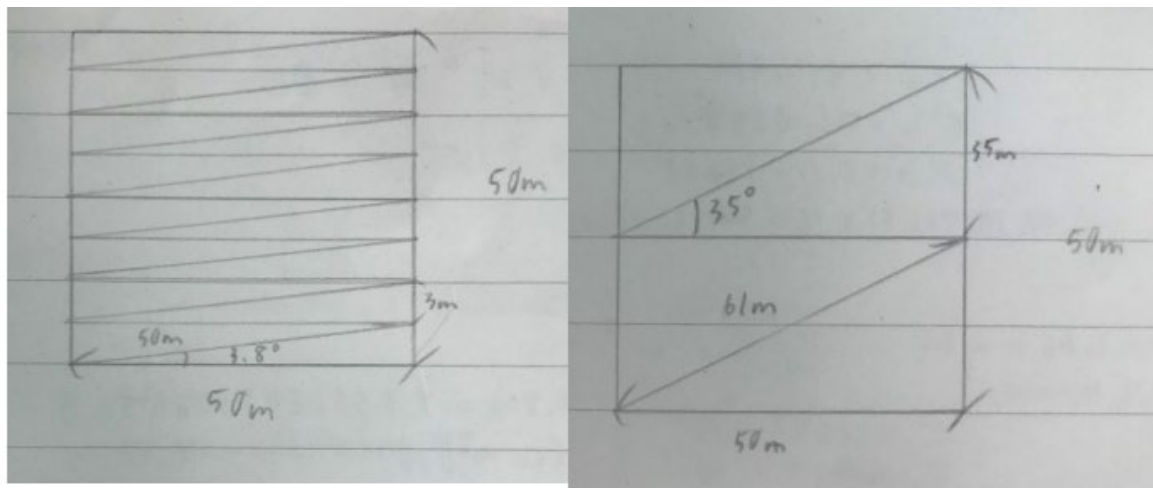


図3 螺旋階段の計算の際の図



シティー・ホール・ロンドン
Wikipedia

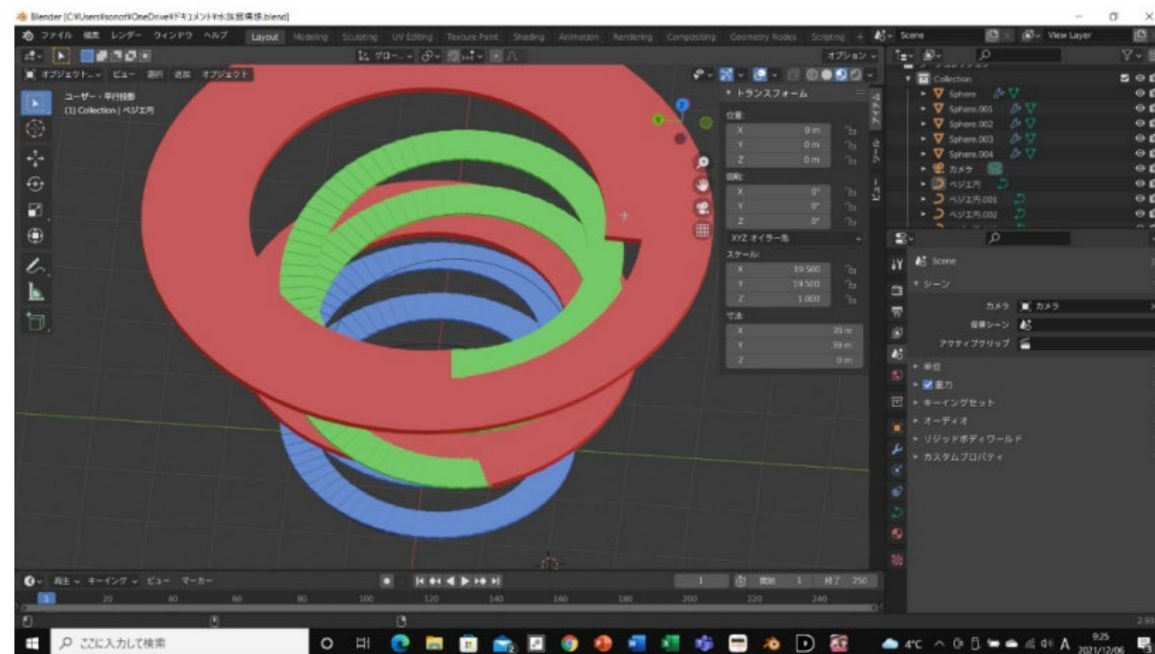
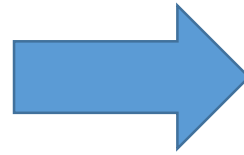
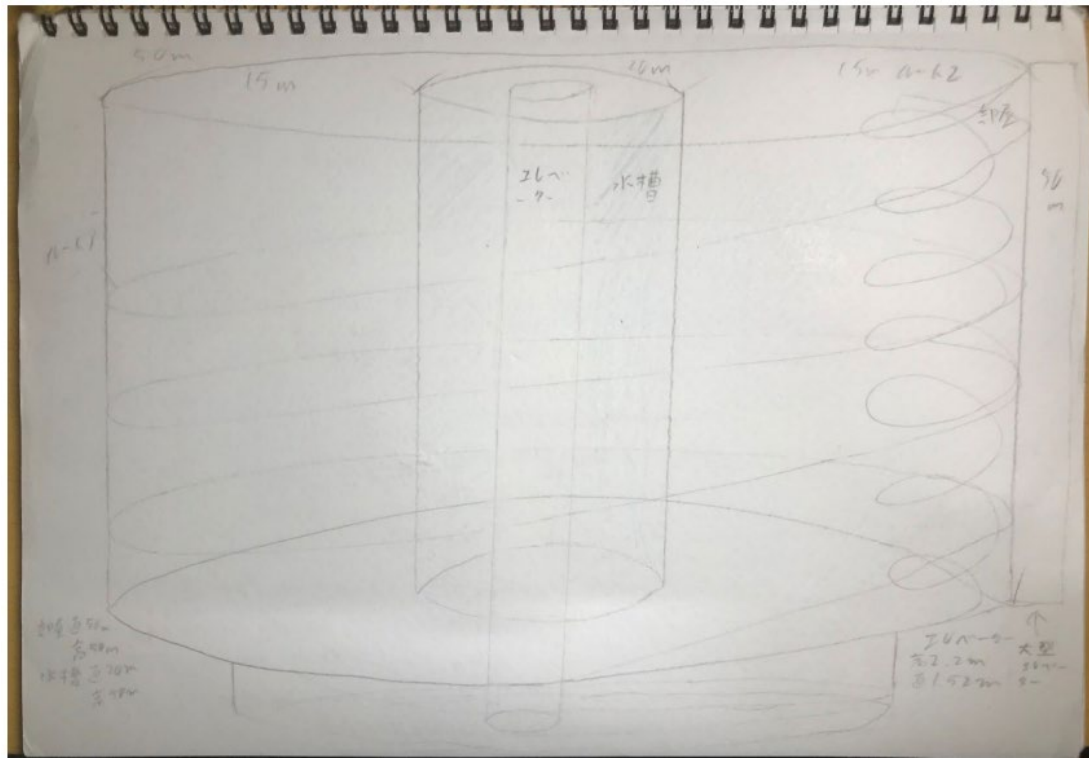


図4 螺旋階段を上から見た図



アクリルガラス板を重ねるたびに光の透過率は下がる⁸⁾。この案の水槽アクリルガラスの透過率の計算を行った。厚さ 4cm のアクリルガラスには透過率が 90% のものと 95% のものがある。このガラスを使うと本案のガラス板の枚数は 640 枚となる。

(1) 透過率 90% のガラスを使った 640 枚の透過率は、 $0.9^{640} = 5.19 \times 10^{-30}$ である。

(2) 透過率 95% のガラスを使った 640 枚の透過率は、 $0.95^{640} = 5.53 \times 10^{-15}$ である。

さらなる，数理モデルに関する教材研究へ

- 自然科学，工学からの例題を集める。
- それを，数学教材として扱える単純モデルに変える。
- 単純モデルを教えるのではなく，単純モデルを導き出せれる教材（演習問題）を作る。
- 数理モデルを用いた（仮想）ベンチャー企業を立ち上げる。
 - （1）折りたたみ構造物解析ベンチャー，（2）振り子ベンチャー
 - （3）寮食ベンチャー，（5）廃校津山水族館モデルベンチャー
 - （6）飛行船津山水族館モデルベンチャー

一緒に楽しみたい研究協力者を求む！！