「円分多項式と無限積」

福井工業高等専門学校
柳原　祐治

以前報告した「円分多項式による因数分解」の応用として、様々な無限積の値が得られたので報告する。

以前、 n 次円分多項式 $F_n(x)$ と任意の自然数 m について、多項式 $F_n(x^m)$ が円分多項式によって因数分解されること、及びその表式を報告した。

一方、無限積について、次のような値が知られている; $|x|<1$ のとき

⑴ $(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})\cdots(1+x^{2^k})\cdots = \dfrac{1}{1-x}$

⑵ $(1+x+x^2)(1+x^3+x^{2\cdot 3})(1+x^{3^2}+x^{2\cdot 3^2})(1+x^{3^3}+x^{2\cdot 3^3})\cdots(1+x^{3^k}+x^{2\cdot 3^k})\cdots = \dfrac{1}{1-x}$

今回は、これらの結果の、円分多項式の因数分解を用いた証明を示す。さらに、同様の手法により、これらの結果が一般化できることを報告する。

つまり、⑴,⑵の無限積は、それぞれ

$$\prod_k F_2(x^{2^k}), \qquad \prod_k F_3(x^{3^k})$$

の形をしているので、実はある多項式 $F_n(x^m)$ の因数分解の一部であり、このことを利用することによっても無限積⑴,⑵の値が得られる。さらに、この手法を一般化することにより、様々な無限積の値が得られた。以下にいくつかの例を示す;

$|x|<1$ のとき

p が素数のとき $\displaystyle\prod_{k=0}^{\infty}\left(x^{(p-1)\cdot p^k}+x^{(p-2)\cdot p^k}+x^{(p-3)\cdot p^k}+\cdots+x^{2\cdot p^k}+x^{p^k}+1\right)=\frac{1}{1-x}$

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(x^{2\cdot 2^k}-x^{2^k}+1\right)=\frac{1}{x^2+x+1}$$