第　23　回グラフ電卓研究会 （福井高専）

べき分布のデータ

梅野　善雄

元一関工業高等専門学校

2023 年 6 月 17 日

目　次

備考

この発表は，2023.05.22 に東京都立産業技術高専 (荒川キャンパス) で開催された「数理モデルに関する科研費研究会」で発表した内容です.

べき分布の定義

- べき分布の確率密度関数

$$f(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}} = \frac{\frac{a}{b}}{\left(\frac{x}{b}\right)^{a+1}} \quad (a > 0, x \geqq b)$$

パレート分布と呼ばれ，Pareto(a, b) などで表される．

- 両対数グラフでは，右下がりの直線になる．

$$\log f(x) = \log C - (a+1)\log x \quad (C = ab^a)$$

- 累積分布関数は

$$P(X \leqq x) = \int_b^x \frac{ab^a}{t^{a+1}}\,dt = 1 - \frac{b^a}{x^a}$$

- 相補累積分布関数はべき関数になる．

$$P(X > x) = \frac{b^a}{x^a}$$

べき分布の平均と分散

- べき分布の平均

$$E(X) = \int_b^\infty x \cdot \frac{ab^a}{x^{a+1}}\,dx = \int_b^\infty \frac{ab^a}{x^a}\,dx$$
$$= \begin{cases} \infty & (0 < a \leqq 1) \\ \dfrac{ab}{a-1} & (a > 1) \end{cases}$$

- べき分布の分散

$$V(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)} \quad (a > 2)$$

- べき分布の n 次モーメント

$$E(X^n) = \begin{cases} \infty & (0 < a \leqq n) \\ \dfrac{ab^n}{a-n} & (a > n) \end{cases}$$

べき分布 Pareto(a, b) の性質

- 確率密度関数に自己相似性がある．

$$f(cx) = \frac{ab^a}{(cx)^{a+1}} = \frac{1}{c^{a+1}} f(x) \propto f(x)$$

- $cX \ (c > 0)$ は Pareto(a, bc) にしたがう．

$$\begin{aligned} P(cX \leqq x) &= P\left(X \leqq \frac{x}{c}\right) \\ &= 1 - \frac{b^a}{(x/c)^a} = 1 - \frac{(bc)^a}{x^a} \end{aligned}$$

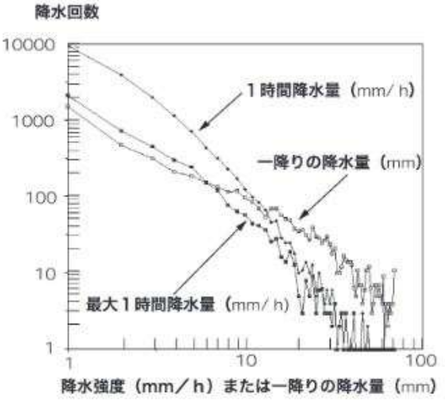
- $X^n \ (n > 0)$ は Pareto$\left(\frac{a}{n}, b^n\right)$ に従う．

$$\begin{aligned} P(X^n \leqq x) &= P(X \leqq x^{\frac{1}{n}}) \\ &= 1 - \frac{b^a}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^a} = 1 - \frac{(b^n)^{\frac{a}{n}}}{x^{\frac{a}{n}}} \end{aligned}$$

- べき分布は，定数倍してもべき乗してもべき分布に従う．

べき分布に従う現象例 (1)

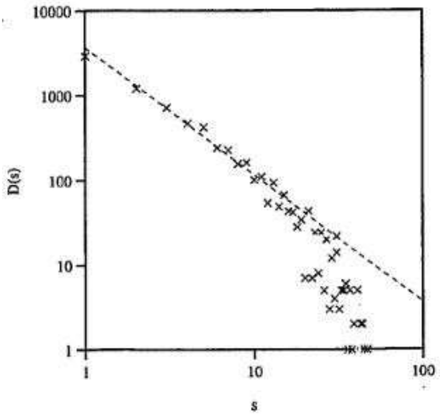
- 東京における降水量と降水回数 (1976～2009 年)



- アメダスデータでの 0 mm には 1 mm 未満の降水も含まれるので，0 mm の前後で 1 mm 以上の降水があるときは「降水あり」と判断し，降水が連続する部分を「一降りの雨」としてデータを修正．

べき分布に従う現象例 (2)

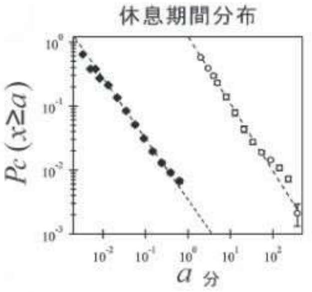
- 熱帯マグロの漁獲高と頻度 (1976–1982)：ロペス岬付近

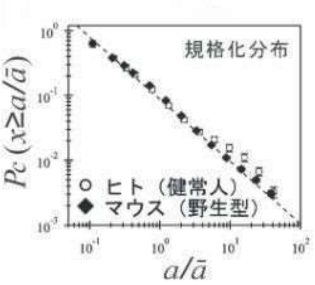


- アフリカ大陸中部大西洋側にあるガボン共和国ロペス岬付近での，周囲 2 km の網を用いた商業漁業による，熱帯マグロの 7 年間の漁獲高のデータ．横軸は 1 回あたりの漁獲高 (トン)，縦軸はその頻度．

べき分布に従う現象例 (3)

- ヒト (健常人 11 名) の身体活動を，腕時計型加速度計で計測し，1 分でゼロレベルを交差する回数で活動量を定義する．
- 野生マウスの活動を，ケージの下に敷いた圧電シートセンサーにより 0.01 秒間隔で計測し，0.1 秒内の局所分散値で活動量を定義する．
- 以上により，ヒトとマウスの活動量の時系列データが得られる．ある閾値 (活動データの平均) を定めて，それを連続して下回る時間を「休息時間」として，その相補累積分布を $P(X \geq x)$ を求める．





- 平均で割って規格化すると，分布がほぼ一致する．べき指数は，ヒトは 0.96，マウスは 0.93．閾値を多少変えても同じ。

ジップの法則

- ジップの法則は，あらゆる箇所で見られる経験則である．たとえば，単語の出現頻度，都市の人口，個体が割れたときの破片の大きさ，$\cdots$
- ある事象を，頻度 f の多い順 R に並べた度数分布表

R	1	2	$\cdots$	N	All
f	f_1	f_2	$\cdots$	f_N	F

- ジップの法則は，C を正定数として

$$f \times R \approx C \qquad \therefore \quad f \approx \frac{C}{R}$$

  が成り立ち，頻度が順位と反比例の関係にある．
- 別な見方をすると，頻度が f_1 以上のものは 1 つしかなく，f_2 以上のものは 2 つ，f_3 以上のものは 3 つある．確率でいうと，頻度がある値以上である確率，つまり，相補累積分布が順位と比例しているとみることができる．
- 一般には，$\alpha > 0$ として，$f = \dfrac{C}{R^\alpha}$ もジップの法則という．

ジップの法則の別な見方

- 合計 F の中から 1 個を選ぶとき，それが k 位である f_k の事象である確率を p_k とすると，$p_k = \dfrac{f_k}{F}$.
- 一般のジップの法則に従っていれば，$f_k = \dfrac{f_1}{k^\alpha}$ なので，

$$F = \sum_{k=1}^{N} f_k = f_1 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$$

- したがって，$p_k = \dfrac{\dfrac{1}{k^\alpha}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}} = \dfrac{1}{k^a \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}}$
- 順位が無限に続くときは，分母にゼータ関数が含まれることになる．
- $P(X = k) = \dfrac{1}{k^\alpha \zeta(\alpha)}$ $(\alpha > 1)$ で表される離散分布はゼータ分布と呼ばれる．

ジップの法則とべき分布

- ジップの法則 $f = \dfrac{C}{R^\alpha}$ を R について解くと，$C^{\frac{1}{\alpha}} f^{-\frac{1}{\alpha}} = R$
- 最終順位 N で割り $r = \dfrac{R}{N}, A = \dfrac{C^{\frac{1}{\alpha}}}{N}$ とおくと，$Af^{-\frac{1}{\alpha}} = r$
- r $(0 < r \leqq 1)$ は順位に関する比率で，r の値が小さいほど頻度 f は大きいので，この式は相補累積分布を表すとみることができる．

$$P(X > f) = Af^{-\frac{1}{\alpha}}$$

- したがって，累積分布 $P(X \leqq f)$ は

$$1 - P(X > f) = 1 - Af^{-\frac{1}{\alpha}}$$

- f で微分すると確率密度関数が得られ，べき分布の形になる．

$$\frac{d}{df}\left(1 - Af^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{A}{\alpha} f^{-\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{A/\alpha}{f^{\frac{1}{\alpha}+1}}$$

- ジップの法則の指数 α と Pareto(a, b) の指数 a とは，$a = \dfrac{1}{\alpha}$ の関係にある．

べき分布に従う確率変数の最大値

- Pareto(a, b) に従う n 個の確率変数の最大値を $X_{\max}$ とする．
- $X_{\max}$ が微小区間 $(x, x + \Delta x]$ に含まれる確率は，確率密度関数を $f(x)$ とすると $f(x)\,\Delta x$ である．
- 他の $n-1$ 個は $P(X \leqq x)$ を満たすので，求める確率は

$$\{P(X \leqq x)\}^{n-1} \cdot f(x)\,\Delta x$$

- n 個の中の 1 個の選び方は n 通りあるので，

$$n \cdot \{P(X \leqq x)\}^{n-1} \cdot f(x)\,\Delta x$$

  を考えることになる．
- そこで，関数 $\pi(x)$ を

$$\pi(x) = n \cdot \frac{ab^a}{x^{a+1}} \cdot \left(1 - \frac{b^a}{x^a}\right)^{n-1}$$

  とおくと，この関数は確率密度関数になる．

$\pi(x)$ は確率密度関数

- $\pi(x) = n \cdot \frac{ab^a}{x^{a+1}} \cdot \left(1 - \frac{b^a}{x^a}\right)^{n-1}$
- $\frac{b^a}{x^a} = t$ とおくと，$-\frac{ab^a}{x^{a+1}}\,dx = dt$
- x が b から ∞ まで変化すると，t は 1 から 0 まで変化する．
- したがって，$[b, \infty)$ における積分は

$$\begin{aligned}\int_b^\infty \pi(x)\,dx &= \int_b^\infty n\left(1 - \frac{b^a}{x^a}\right)^{n-1} \frac{ab^a}{x^{a+1}}\,dx \\ &= n\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,dt \\ &= -\left[(1-t)^n\right]_0^1 = 1\end{aligned}$$

- したがって，$\pi(x)$ は確率密度関数である．

最大値の平均

- 最大値 $X_{\max}$ の平均は

$$\begin{aligned} E(X_{\max}) &= \int_b^\infty x\,\pi(x)\,dx \\ &= n\int_b^\infty \frac{ab^a}{x^a}\left(1-\frac{b^a}{x^a}\right)^{n-1} dx \end{aligned}$$

- $1-\dfrac{b^a}{x^a}=t$ とおくと，$x=\dfrac{b}{(1-t)^{\frac{1}{a}}}$ となり，x が b から ∞ まで変化すると，t は 0 から 1 まで変化する．
- 微分は $a\cdot\dfrac{b^a}{x^a}\cdot\dfrac{1}{x}\,dx=dt$ より，$\dfrac{ab^a}{x^a}\,dx=\dfrac{b}{(1-t)^{\frac{1}{a}}}\,dt$
- したがって，

$$E(X_{\max}) = nb\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(1-t)^{\frac{1}{a}}}\,dt = nb\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{-\frac{1}{a}}\,dt$$

最大値の平均とベータ関数

- $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ は，ベータ関数と呼ばれる．
- $y > 0$，$y - 1 = -\frac{1}{a}$ となる y は $y = 1 - \frac{1}{a}, a > 1$．
- このとき，$X_{\max}$ の平均は，ベータ関数を用いて

$$E(X_{\max}) = nb \cdot B\left(n, 1 - \frac{1}{a}\right)$$

  と表され，$E(X_{\max}) \sim n^{\frac{1}{a}}$ (漸近近似) が成り立つ．
- 証明は，ベータ関数とガンマ関数との関係式を用いる．

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

- x が十分に大きいとき，スターリングの公式により

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x = \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$$

最大値の平均とべき関数

- $\alpha = 1 - \dfrac{1}{a}$ とおいてスターリングの公式を利用すると，

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)} \approx \frac{\sqrt{2\pi} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}}{\sqrt{2\pi}(n+\alpha)^{n+\alpha-\frac{1}{2}} e^{-(n+\alpha)}}$$
$$= \left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{(n+\alpha)^{\alpha} e^{-\alpha}}$$
$$= \left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}\right)^{n} \left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{n^{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} e^{-\alpha}}$$

- α が定数で n が十分に大きいときは $1 + \dfrac{\alpha}{n} \approx 1$ とみれる．
- テイラー展開すると，

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 - \cdots \approx 1 - \frac{\alpha}{n}$$

最大値の平均とべき関数 2

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n}{\alpha}}\right)^{-\frac{n}{\alpha}\cdot(-\alpha)} = e^{-\alpha}$
  であるから，n が十分大であれば
  $$\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}\right)^n \approx \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n \approx e^{-\alpha}$$
- 以上を利用すると，
  $$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)} \approx e^{-\alpha}\cdot 1\cdot\frac{1}{n^{\alpha}\cdot 1\cdot e^{-\alpha}} = n^{-\alpha}$$
- $\alpha = 1-\dfrac{1}{a}$ $(a>1)$ であるので，
  $$E(X_{\max}) \approx nb\cdot n^{-1+\frac{1}{a}}\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{a}\right) = bn^{\frac{1}{a}}\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{a}\right)$$
  したがって，漸近近似では，$E(X_{\max}) \sim n^{\frac{1}{a}}$ である．

Pareto(2,1) の最大値の平均

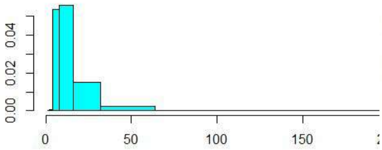
- Pareto(2,1) では，$E(X_{\max}) = n \cdot B\left(n, \frac{1}{2}\right) \approx \sqrt{n\pi}$

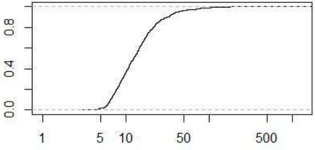
n	10	100	1000	10000
$nB(n, 1/2)$	5.675	17.74	56.05	177.24
$\sqrt{n\pi}$	5.604	17.72	56.04	177.24

- 具体的に乱数を発生させ，最大値 1000 個で確認する．

n	10	100	1000	10000
Mean	5.962	18.477	59.79	169.50
SD	8.220	42.80	134.8	264.1
Min	1.362	3.026	11.86	34.91
Max	123.81	1253.8	3357.5	6192.5

- $n = 100$ の場合の，最大値のヒストグラムと累積分布





グラフ電卓絡みで開設した Web サイトであるが，いろいろなページで構成される．

- グラフ電卓：活用事例 (数学・工学)・操作マニュアル等
- 数学関係：TeX，emath，MePoTeX，gnuplot，Maxima，R
- リンク集：数学学習・学習総合・べき分布・悩みごと等

下記は，「べき分布」に関するリンク集のメニューである．

■ 「べキ分布」：関連リンク集　[Map]

はじめに(概説)	「べキ分布」の解説	「べキ分布」の具体例
「べキ分布」と自然現象	「べキ分布」と生物現象	「べキ分布」と社会現象
「べキ分布」と経済現象	「べキ分布」とネットワーク	「べキ分布」のメカニズム
相転移・臨界現象	パーコレーション(浸透現象)	複雑系・フラクタル
自己組織化臨界現象	シミュレーション	参考文献