

数学モデリング教材の紹介

松田 修（津山高専）

1. はじめに

本研究は、「数理モデルを立て分析する能力を育成する数学教材と授業法及びカリキュラムの開発」（JSPS 科研費 JP23K25725）で行われているものである。

我々は、数学教育は、伝統的な数学教育の内容からの転換を迫られていると考える。それは、将来、答えのない問題に取り組むために必要となる能力育成への転換である。より具体的には、“今あるデータから数理モデルを立てて分析するというプロセスを学ぶ”といった教育内容への転換である。我々はこれを、「数理モデルを立て分析する数学教育への転換」と呼ぶ。しかし、注意すべき点は、数理モデルをたてる能力育成は、数学的センスや柔軟性という要素を含んでいるため、特定の数学の科目だけで扱えばよいというものではなく、数学の中の様々な科目の中で、繰り返し、長期的に育成する必要がある。

以上のことが達成できる数学教材を開発する。

2. 2年生の「総合理工演習」という科目で開発した教材例

先進科学系2年生で開講している「総合理工演習」の前期では、数学の演習を実施している。前半は、数列と初等幾何、それに今年度から、「Math Modeling Practice」を導入した。

(1) 数列は、以下のような教材を扱う。

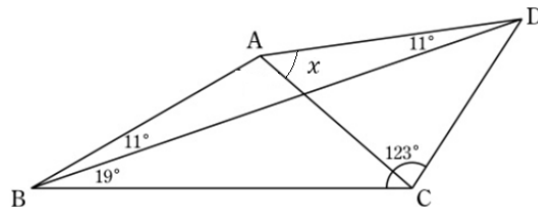
次の数列 a_n の法則を考え、それを示し、考えた法則から a_{12} を求めよ。

1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, ...

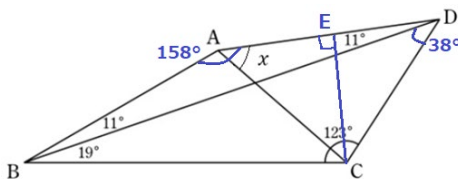
趣旨. データを分析し、そこから得られた法則を定式化し、将来を予測することを体験させる。

(2) 初等幾何は、以下のような教材を扱う。

下図、四角形ABCDにおいて、 $\angle ADB = \angle ABD = 11^\circ$, $\angle DBC = 19^\circ$, $\angle BCD = 123^\circ$ とする。
 $x = \angle DAC$ を求めよ



趣旨. 図形を分析し、角 x を求めるための式を立てる。その後、電卓を用いて、 x を求める訓練を行う。

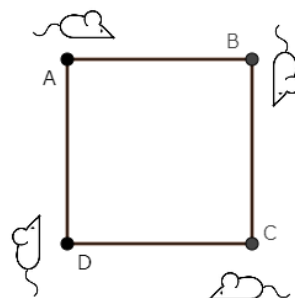


$$\tan x = \frac{CE}{AE} = \frac{CD \sin 49^\circ}{\frac{BD \sin 11^\circ}{\sin 158^\circ} - CD \cos 49^\circ}$$

これより, $x = 49^\circ$

(3) Math Modeling Practice は、数理的に考える努力を促す教材を開発した。

例 2-1. 正方形の頂点 A,B,C,D にマウスがいて、A のマウスは B のマウスを、B マウスは C マウスを、C マウスは D マウス、D マウスは A マウスを、それぞれ等速で追いかける。マウスの軌道はどのような曲線になると考えられるか説明せよ。



例 2-2. ある細菌の増殖について以下のデータが得られた。3 時間後の細菌の個数を予測し、その理由を説明せよ。

時間 (分)	0	15	30	45	60	75
個数	12	18	27	40	60	91

例 2-3. 下図の横軸の水平な線が傾いて見える理由を、自分なりに考えて、説明せよ。



例 2-4. 下図のような 3 次元物体を、実際に角材を使って、作ることができるのか、できないのか、その理由を、自分なりに考えて、説明せよ。

図 A

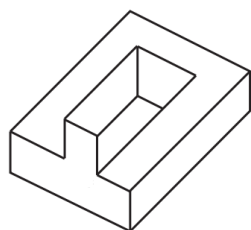
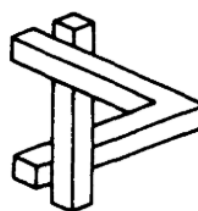


図 B



3. 4 年生の「総合数学演習 II」という科目で開発した教材例

この授業は、今年度から始めた授業で、主に線形代数 (n 次元ベクトル空間論) を行う。毎時間 20 分程度の演習時間を設け、その時間に扱ったテーマの簡単な確認問題と Math Modeling Practice を行う。以下は、開発した Math Modeling Practice の教材例である。

例 3-1. 地球大気中のすべての点の天気を予測するためには、風、気温、気圧、水蒸気量の情報が必要であるといわれている。これは、ある時間のある点における天気予測モデルを何次元空間と考えているといえるか。

例 3-2. 76 鍵盤のピアノが作る音の空間は、76 次元空間と考える。このとき、ピアノで弾く曲「猫踏んじゃった」の数学モデル空間のランクは、いくつと考えられるか。説明せよ。

例 3-3. かき氷を扱う店で、その日、“イチゴ”、“練乳”、“宇治金時”、“抹茶”の販売売上は、それぞれ全売上の何割を占めるかを確率的に予測したい。予測に必要なデータは何個（何次元）で、どのような項目が必要と考えるか説明せよ。

例 3-4. ビッグファイブとは、アメリカの心理学者ルイス・R・ゴールドバーグが提唱した個人の性格に関する学説である。ビッグファイブによると、人の個性は 5 つの因子によって分類することができるとされている。その 5 つの因子とは、「Openness（開放性、新しいことに挑戦する意欲がどれだけ高いか）」「Conscientiousness（誠実性、注意深く、勤勉であろうとする願望がどれだけ強い）」「Extraversion（外向性、気力や社交性、自信がどれだけ高いか）」「Agreeableness（協調性、親しみやすさや、思いやりを示す能力、他人をサポートしようとする意欲）」「Neuroticism（神経症的傾向、マイナスの感情を抱く傾向がどれだけ高いか）」である。この 5 つの因子の強弱が人によって違うため、人の性格や振る舞いに違いが出るというのがビッグファイブの学説の主張である。

以下のアンケート調査を行い、自分と友だちの性格のコサイン類似度を求めよう。

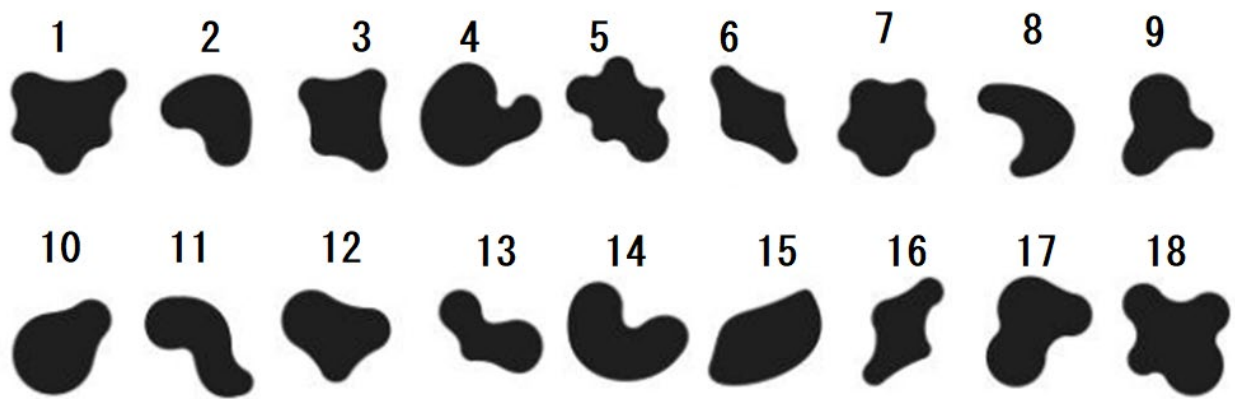
質問 O：私は知的な好奇心が、 4 とても強い, 3 強い 2 普通, 1 弱い 0 かなり弱い
 質問 C：私は責任感が, 4 とても強い, 3 強い 2 普通, 1 弱い 0 かなり弱い
 質問 E：私は社交性が, 4 とても強い, 3 強い 2 普通, 1 弱い 0 かなり弱い
 質問 A：私は協調性が, 4 とても強い, 3 強い 2 普通, 1 弱い 0 かなり弱い
 質問 N：私は神経症的傾向が, 4 とても強い, 3 強い 2 普通, 1 弱い 0 かなり弱い

	自分	友だち 1	友だち 2	友だち 3
O				
C				
E				
A				
N				

自分と友だち 1	
自分と友だち 2	
自分と友だち 3	

例 3-5. 以下の 18 個の形を、機械学習を使って 2 つに分類したい。分類するための基準の形を 2 つ選び、何次元のどのような数値データで、分類するか、その分類法を説明し、それに従って分類せよ。

* 機械学習で可能なこと：各図形の長さの近似測定、面積の近似測定、正多角形との比較測定、楕円との比較測定、画像の大きさを変えること、基準の数値データとの比較測定



基準の形の番号	クラス A	クラス B
分類法を説明		
分類結果	クラス A	クラス B

例 3-6. 線形超平面の式： $3x + 11y - 9z = 12$ を用いて，3 個のデータ $A(1,0,-2)$ ， $B(-2,1,3)$ ， $C(-6,-4,2)$ を分類しよう．

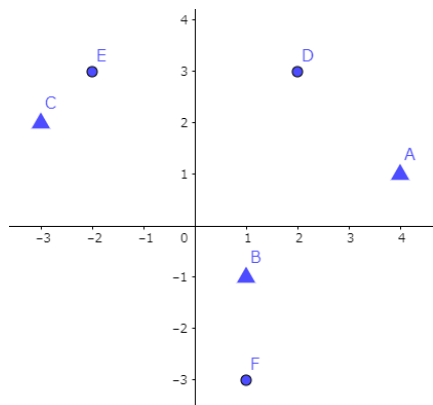
クラス V= { }	クラス W= { }
---------------------------------	---------------------------------

例 3-7. データ : A(4,1), B(1,-1), C(-3,2), D(2,3), E(-2,3), F(1,-3)

クラス $V = \{A, B, C\}$, クラス $W = \{D, E, F\}$ を線形超平面で分割せよ.

(1) 写像関数を決めよ.

$\Phi: (x, y) \rightarrow (\quad , \quad , \quad)$
--



元のデータ空間

特徴空間 (イメージ図)

(2) 写像関数 Φ を使って, 各点を変換せよ.

A'	B'	C'
D'	E'	F'

(3) 分離するための線形超平面の式を立てよ.

線形超平面の式 :

4. 今後の計画

4 年生 : ニューラルネットワークにおける畳み込みがイメージできる教材を開発する.

2 年生 : ニューラルネットワークにおいて, 微分の役割, 誤差を最小にするアイディア (勾配法) がイメージできる教材を開発する.

3 年生 (教養数学) : 画像認識におけるフィルター (畳み込み) がイメージできる教材を開発する.

本研究は, JSPS 科研費 JP23K25725 の支援を受けたものです.