二次曲線付加法の改良の検討について

牧下英世, 芝浦工業大学工学部

図で示した円 F，F$'$ の半径をそれぞれ r，r'（$r > r'$）とする．

定理 1 図 1 のように，直線 ℓ と ℓ の上にない定点 F がある．円の中心 P は，ℓ を準線，F を焦点とする放物線（破線）上にある．すなわち，

$$\mathrm{PF} = \mathrm{PH}$$

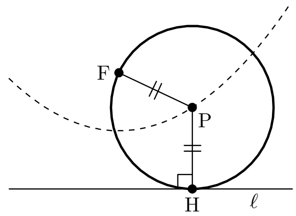


図 1: 円 P は点 F を通り直線 ℓ に接する

定理 2 図 2 のように，定円 F とその内部の定点 F$'$ がある．F$'$ を通り円 F に接する円の中心 P は，2 点 F, F$'$ を焦点とする楕円（破線）上にある．2 点 F, F$'$ から P までの距離の和 PF + PF$'$ は，円 F の半径 r となる．すなわち，

$$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = (\mathrm{FQ} - \mathrm{PQ}) + \mathrm{PF}' = r$$

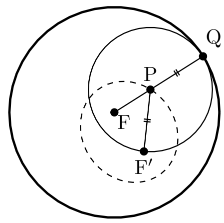


図 2: 円 P は点 F$'$ を通り円 F に内接する

定理 3 定円 F とその外部の定点 F$'$ がある（図 3 (a), (b) ）．F$'$ を通り円 F に接する円の中心 P は，2 点 F, F$'$ を焦点とする双曲線（破線）上にある．2 点 F, F$'$ から P までの距離の差 $|\mathrm{PF} - \mathrm{PF}'|$ は，(a), (b) ともに円 F の半径 r となる．すなわち，

(a): $|\mathrm{PF} - \mathrm{PF}'| = \mathrm{PF} - \mathrm{PF}' = (\mathrm{PQ} + \mathrm{FQ}) - \mathrm{PF}' = (\mathrm{PQ} + r) - \mathrm{PF}' = r$

(b): $|\mathrm{PF} - \mathrm{PF}'| = \mathrm{PF}' - \mathrm{PF} = \mathrm{PF}' - (\mathrm{PQ} - \mathrm{FQ}) = \mathrm{PF}' - (\mathrm{PQ} - r) = r$

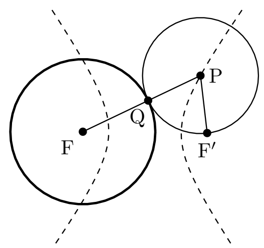


図 3(a): 円 P は点 F$'$ を通り円 F に外接する

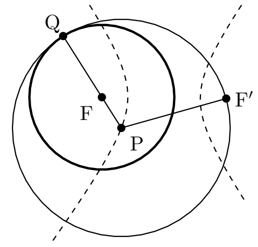


図 3(b): 円 P は点 F$'$ を通り円 F に内接する

定理 4 図 4 のように，定円 F とその接線 ℓ がある．円 F と直線 ℓ の両方に，円 F と同じ側で接する円の中心 P は，点 F を焦点，直線 ℓ' を準線（破線）とする放物線（破線）上にある．すなわち，

$$\begin{aligned}\mathrm{PF} &= \mathrm{PN} + \mathrm{FN} = \mathrm{PH} + \mathrm{FT} \\ &= \mathrm{PH} + \mathrm{TL} \\ &= \mathrm{PH} + \mathrm{HK} = \mathrm{PK}\end{aligned}$$

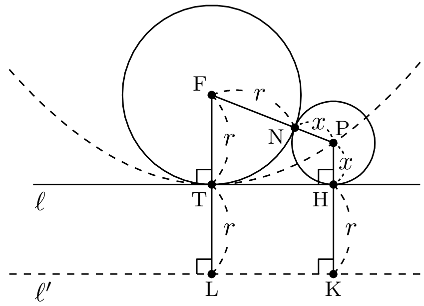


図 4: 円 P は円 F と直線 ℓ に接する

定理 5　図 5 (a), (b) のように，定円 F と F の内部の定円 F′ がある．この 2 円の両方に接する円の中心 P は，2 点 F, F′ を焦点とする楕円（破線）上にある．2 点 F, F′ から P までの距離の和 PF + PF′ は，次の (a), (b) のようになる．すなわち，

(a): $\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=(\mathrm{FQ}-\mathrm{PQ})+(\mathrm{PR}+\mathrm{F'R})=(r-\mathrm{PQ})+(\mathrm{PR}+r')=r+r'$

(b): $\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=(\mathrm{FQ}-\mathrm{PQ})+(\mathrm{PR}-\mathrm{F'R})=(r-\mathrm{PQ})+(\mathrm{PR}-r')=r-r'$

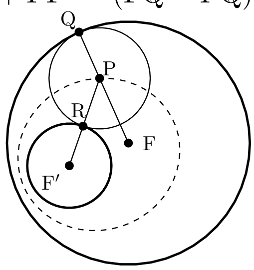


図 5(a): 円 P は円 F に内接し, 円 F′ に外接する

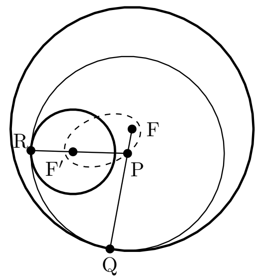


図 5(b): 円 P は円 F, F′ に内接する

定理 6　図 6 (a), (b) のように，互いに外部にある 2 円 F, F′ がある．2 円の両方に接する円の中心 P は，2 点 F, F′ を焦点とする双曲線（破線）上にある．2 点 F, F′ から P までの距離の差 |PF − PF′| は，(a), (b) ともに $r-r'$ となる．すなわち，

(a): $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}=(\mathrm{PQ}+\mathrm{FQ})-(\mathrm{PR}+\mathrm{F'R})=(\mathrm{PQ}+r)-(\mathrm{PR}+r')=r-r'$

(b): $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=\mathrm{PF'}-\mathrm{PF}=(\mathrm{PR}-\mathrm{F'R})-(\mathrm{PQ}-\mathrm{FQ})=(\mathrm{PR}-r')-(\mathrm{PQ}-r)=r-r'$

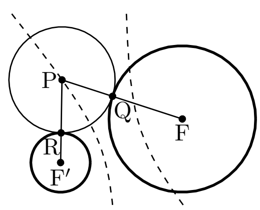


図 6(a): 円 P は円 F, F′ に外接する

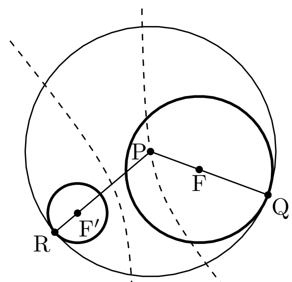


図 6(b): 円 P は円 F, F′ に内接する

定理 7　図 7 (a), (b) のように，互いに外部にある 2 円 F, F′ がある．一方の円に内接し，かつ，他方の円に外接する円の中心 P は，2 点 F, F′ を焦点とする双曲線（破線）上にある．2 点 F, F′ から P までの距離の差 |PF − PF′| は，(a), (b) ともに $r+r'$ となる．すなわち，

(a): $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}=(\mathrm{PQ}+\mathrm{FQ})-(\mathrm{PR}-\mathrm{F'P})=(\mathrm{PQ}+r)-(\mathrm{PR}-r')=r+r'$

(b): $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=\mathrm{PF'}-\mathrm{PF}=(\mathrm{PR}+\mathrm{F'R})-(\mathrm{PQ}-\mathrm{FQ})=(\mathrm{PR}+r')-(\mathrm{PQ}-r)=r+r'$

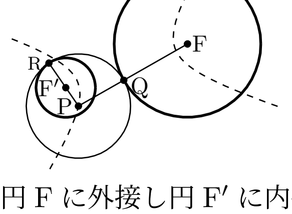


図 7(a): 円 P は円 F に外接し円 F′ に内接する

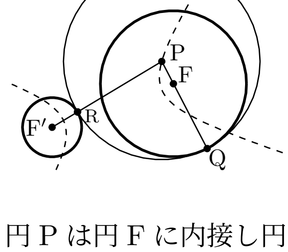


図 7(b): 円 P は円 F に内接し円 F′ に外接する

定理 8　2 円 F, F′ が 2 つの異なる 2 点で交わるとき，F, F′ の共通部分に接する円 P の中心は，2 点 F, F′ を焦点とする双曲線（破線）上にある．（図 8）

ただし，2 点 F, F′ から P までの距離の差 $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|$ は，$r-r'$ となる．

$$\begin{aligned}|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}| &= \mathrm{PF}-\mathrm{PF'} = (\mathrm{FQ}-\mathrm{PQ})-(\mathrm{F'Q'}-\mathrm{PQ'})\\ &= (r-\mathrm{PQ})-(r'-\mathrm{PQ'}) = r-r'\end{aligned}$$

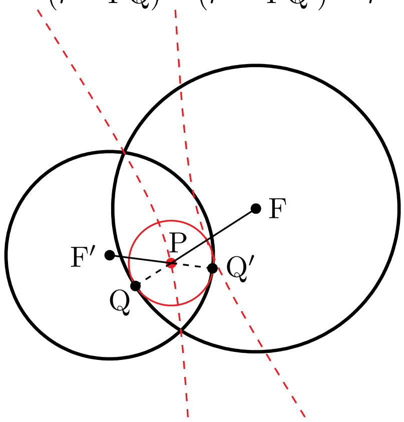


図 8: 円 P は円 F と円 F′ の両方に内接する

定理 8 について，もう少し深掘り研究をしよう．

探究 1　定理 8 の双曲線の延長上に円の中心がある場合は，定理 6(a) の場合になる．(図 9)
すなわち，2 円に外接する場合である．

探究 2　もう一方の双曲線上に円の中心がある場合は，定理 6(b) の場合になる．（図 10）

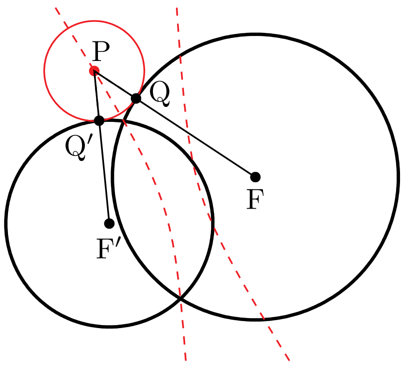


図 9: 円 P は円 F と円 F′ の両方に外接する

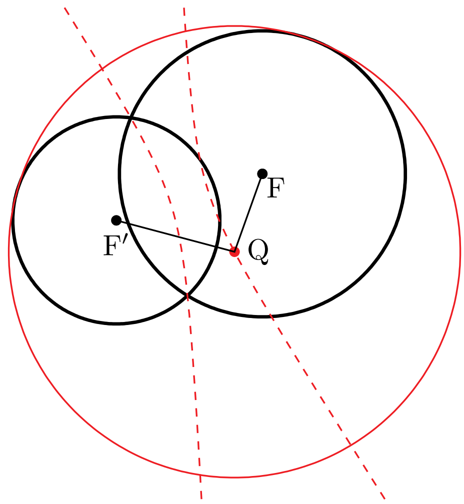


図 10: 円 P は円 F と円 F′ の両方に内接する

定理 8 は，定理 6 の特別な場合である．

探究 3　図 11(a) または 11(b) は，円 P は 2 円のいずれか一方に内接し，かつ，他方に外接する場合である．円 P の中心 P は，定理 5(a) の場合と同様に 2 点 F，F′ を焦点とする楕円上にある．

解説　図 11(a)；$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=(\mathrm{FQ}-\mathrm{PQ})+(\mathrm{F'Q'}+\mathrm{PQ'})=\mathrm{FQ}+\mathrm{F'Q'}=r+r'$

図 11(b)；$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=(\mathrm{PQ}+\mathrm{FQ})+(\mathrm{F'Q'}-\mathrm{PQ'})=\mathrm{FQ}+\mathrm{F'Q'}=r+r'$

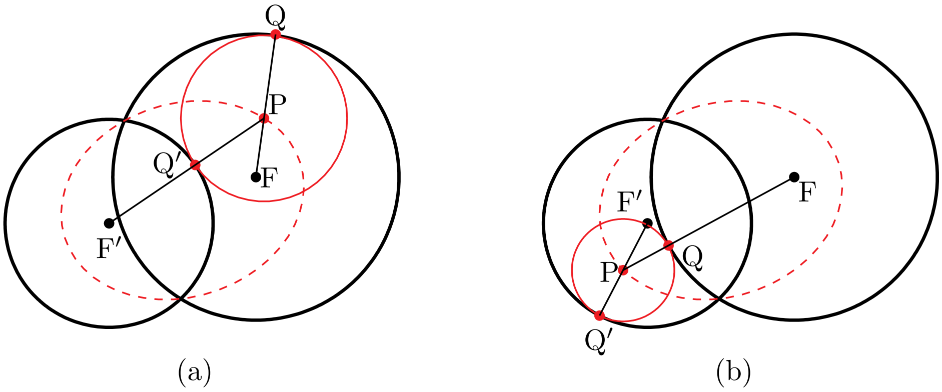


図 11: 円 P は 2 円のいずれか一方に内接し，かつ，他方に外接する

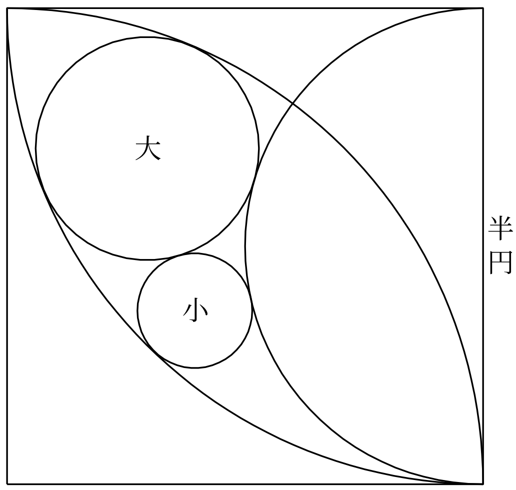
実際の算額：正方形と 2 つの四分円と半円で挟まれた円：菅原神社の算額

次は岩手県一関市の菅原神社の算額（『岩手の現存算額のすべて』安富有恒著）である．

岩手県一関市の菅原神社の算額

今有方内如図設象限二个及半円容大小円
其小円径一十七寸問大円径幾何
答曰大円径三十三寸
術曰置小円径乗三十三个以一十七个除之
得大円径合問

千葉喜平胤定



問題　図のように，正方形の内部に 2 つの四分円と半円があり，その間に大円と小円がそれぞれ一個入っている．小円の直径が 17 寸であるとき，大円の直径を求めよ．

また，**この図を二次曲線付加法によって作図してみよう．**

答，大円の直径は 33 寸である．

結論　2 円の共通部分に内接する円の問題は，算額の問題としてよく出題されるので，定理 8 とした．探究 1, 探究 2 は，それぞれ定理 6 の (a), (b) の場合である．

本資料の定理 1 から定理 7 は，拙著，『二次曲線付加法による作図と CAS を活用した解法; 算額問題を題材として』（日数教高専大学部会誌 30 号 pp.1-12, 2024）から一部を引用した．